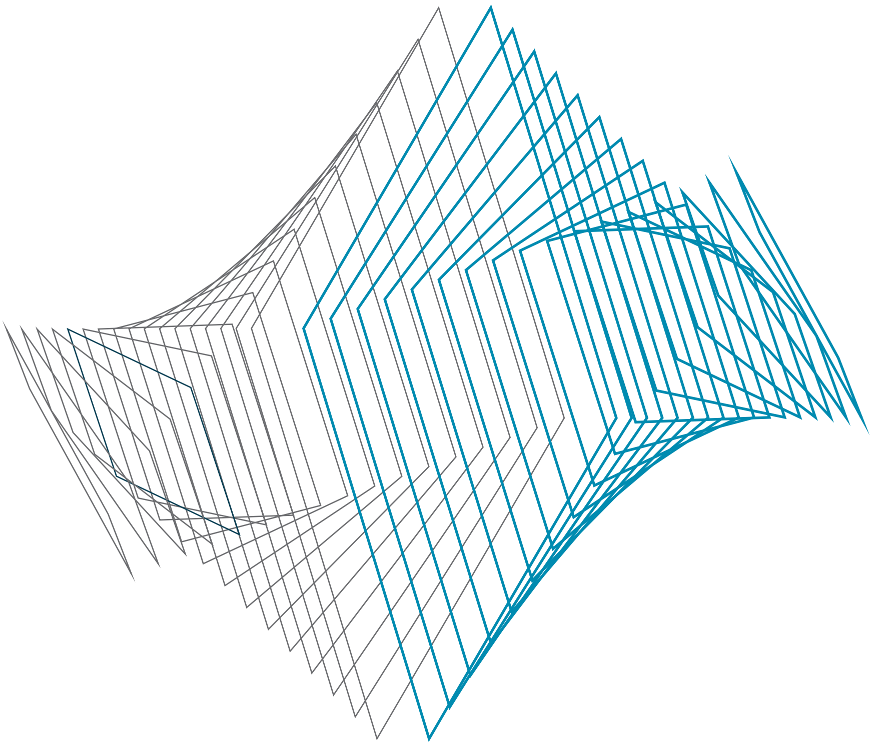
MATEMATIKA VŠEM

2014

Manuál uživatele projektu

Coufal Jan, Lukšová Hana, Pešková Blanka, Tobíšek Jiří



Metodika pro učitele středních škol, Matematika VŠEM

VYSOKÁ ŠKOLA EKONOMIE A MANAGEMENTU

MATEMATIKA VŠEM

Manuál uživatele projektu Matematika VŠEM

Coufal Jan

Lukšová Hana

Pešková Blanka

Tobíšek Jiří

Copyright © Vysoká školy ekonomie a managementu 2014

Vydání první. Všechna práva vyhrazena

ISBN: 978-80-87839-26-3

Vysoká škola ekonomie a managementu

www.vsem.cz

Popularizace matematiky a podpora přechodu středoškolských studentů na vysoké školy technického směru.

Registrační číslo: CZ.2.17/3.1.00/36239

Evropský sociální fond
Praha a EU – Investujeme do vaší budoucnosti

Obsah

1 Úvod

Milý čtenáři, pokud si myslíš, že na tebe čeká milostný příběh, nebyl jsi nikdy na větším omylu. Očekáváš city, poezii, fantazii? Naději, vášeň, dráždivost a melodrama? Raději své naděje pokorně zkroť. Očekává tě cosi skutečného, chladného a solidního, něco tak neromantického jako pondělní ráno, kdy všichni, kdo musí pracovat, se probouzejí s vědomím, že je třeba vstát, a pak také vstanou.

(Charlotte Brontëová – Předehra k Shirley)

Matematika probíraná ve škole je však jen nepatrnou částí mnohem rozsáhlejší oblasti činnosti, která se klene přes celá tisíciletí a provozují ji lidé na celé planetě. Matematika je skutečně základem všeho, co nás provází v každodenním životě – mobilní telefony, zdravotnictví, změny klimatu – a tento vliv narůstá stále rychleji. Ale většina tohoto působení se odehrává jaksi v skrytu či „v zákulisí“ a bylo by velmi snadné propadnout pocitu, že vlastně žádné působení není. Žijeme ve světě, v němž je stále těžší najít si čas na systematické pročtení dlouhé a složité argumentace nebo diskuse.

Projekt Popularizace matematiky a podpora přechodu středoškolských studentů na vysoké školy technického směru (zkrácený název Matematika VŠEM) se řeší v rámci grantu Operačního programu Praha adaptabilita (dále OPPA) na dvou řešitelských pracovištích – hlavním centrem je Vysoká škola ekonomie a managementu (dále VŠEM) o. p. s. v Praze 5 (zde je zdroj a tvorba produktů pro internet i tištěné výstupy) a druhým řešitelským místem je nejstarší gymnázium v Praze 4, jde o Gymnázium Elišky Krásnohorské (dále Gekom) v Michli (zde se testují jednotlivé produkty se studenty a pedagogy). Cílem projektu je poskytovat zajímavou formou vysokou kvalitu matematického vzdělání a zvýšit matematickou gramotnost především současných středoškoláků. Uvádíme nejen záměr projektu, ale i jeho výstupy a aktuální stav jejich realizace. Speciálně se věnujeme video e-learningovým prezentacím, jejich obsahu a zaměření. Pro prezentaci výstupů je webová stránka http://www.matematikavsem.cz/, zde jsou základní informace o projektu, řešitelských týmech, mini lekce (jde vlastně o video prezentace) uspořádané do sedmi kapitol, ze kterých je z velké části dokončeno pět kapitol, jednotlivé kapitoly se kontinuálně doplňují. Dále jsou zde testy s automatickým vyhodnocováním, kontakty (pro veškeré náměty, připomínky, návrhy dalších příkladů i případné další podněty je určena emailová adresa: mailto:info@matematikavsem.cz), odkazy na účty projektu na sociálních sítích (Twitter, Facebook a YouTube).

Co si vybrat? Na to není třeba příliš se ptát. Vyberte si všechno, co je pro vás nové, o čem soudíte, že je krásné a že se vám může někdy k něčemu hodit, ať je to slovo nebo věta, ať je to myšlenka nebo vyprávění a vůbec všechno, co vidíte, že se třpytí jako drahokam. Někteří hovoří o tom, že matematika je jako past na myši. Lze to vyjádřit i jinak. Matematika je oceán a toho, kdo se na něj jednou odváží, buď postihne mořská nemoc, když s hrůzou pomyslí na jeho hloubku a šíři, nebo se jednou provždy zasnoubí s jeho nekonečnými vodami. Právě proto je matematika velkým dobrodružstvím myšlení.

1.1 Popis řešitelských pracovišť

1.1.1 VŠEM

Vysoká škola ekonomie a managementu, o.p.s. (VŠEM) ve své činnosti vychází z významu inovační výkonnosti a kvality lidských zdrojů pro růstový potenciál a konkurenceschopnost národní ekonomiky. Svými aktivitami tvorby a aplikace znalostí podporuje VŠEM strategii chytrého, inkluzivního a udržitelného růstu Evropa 2020. VŠEM uskutečňuje vzdělávací programy v oblasti ekonomiky a managementu na mezinárodně srovnatelné odborné úrovni cestou tvořivé interakce pedagogické, výzkumné, expertní, publikační a informační činnosti.

Výzkumné a vývojové aktivity VŠEM

VŠEM soustavně rozvíjí aktivity základního a aplikovaného výzkumu a vývoje, které odrážejí vnitřní znalostní poptávku vysokoškolské výuky a vnější domácí a zahraniční expertní poptávku. Od doby vzniku VŠEM prošly aktivity výzkumu a vývoje postupnou transformací organizačního uspořádání, zdrojové struktury, tematického zaměření a geografického záběru.

Organizačně jsou aktivity výzkumu a vývoje strukturovány do pracovišť Centra inovačních studií, Centra ekonomických studií a Centre for Economic Studies. Zatímco v předchozím období tematické zaměření výzkumu a vývoje sledovalo spíše organizační strukturu na úrovni jednotlivých pracovišť, v posledních dvou letech je důraz kladen na jejich propojení prostřednictvím zastřešujících horizontálních projektů k dosažení odpovídající synergie při využití dostupných znalostních i ekonomických zdrojů. Tento trend odráží rostoucí potřebu propojení napříč tématy (zejména s rozšiřujícím se pojetím zdrojů a výsledků inovační výkonnosti) i napříč fázemi inovačního cyklu (s důrazem na aplikaci vytvářených znalostí ve vnitřních a vnějších expertních aktivitách).

Zdroje pro aktivity výzkumu a vývoje VŠEM jsou získávány z realizace vysokoškolské výuky (která představuje vnitřní znalostní poptávku) a od vnějších domácích a zahraničních poskytovatelů (tedy vnější domácí a zahraniční znalostní poptávky). Zatímco v předchozím období mezi vnějšími poskytovateli převažovaly domácí subjekty, postupně narůstá význam zahraničních zdrojů zejména díky účasti v mezinárodních projektech 7. Rámcového programu.

Tematicky jsou aktivity výzkumu a vývoje VŠEM dlouhodobě soustředěny na priority rozvojových strategií Evropské unie, tedy Lisabonské strategie a následně strategie Evropa 2020. Díky aktivní účasti v mezinárodních projektech a znalostních sítích sleduje tematické zaměření výzkumu a vývoje VŠEM aktuální trendy tvorby a aplikace znalostí, které jsou využívány ve vysokoškolské výuce a v expertní práci pro zahraniční a domácí instituce. Dlouhodobé tematické priority výzkumu a vývoje VŠEM zahrnují **konkurenceschopnost a inovační výkonnost** od makroekonomické přes regionální a odvětvovou úroveň po úroveň mikroekonomickou a od analýzy jejich faktorů po hodnocení účinnosti jejich podpory (evidence-based policy). V souladu s trendy sledovanými v rozvojových strategiích EU se postupně rozšiřuje pojetí inovačně založené konkurenceschopnosti a růstové výkonnosti ve výzkumu a vývoji VŠEM od dominantně ekonomického přístupu k širšímu záběru chytrého, inkluzivního a udržitelného růstu, od primárně technických a podnikových inovací k široce pojatému konceptu sociálních a společenských inovací.

Postupně se také rozšiřuje **geografický záběr** aktivit VŠEM, který stále více přesahuje země EU a OECD zahrnuje rovněž tranzitivní země a země rozvíjejících se trhů. Tento trend sleduje rostoucí internacionalizaci projektů výzkumu a vývoje, kterých se VŠEM účastní, zejména v rámci Expertní skupiny politik konkurenceschopnosti a inovací Evropské hospodářské komise OSN (která zahrnuje 56 členských zemí euroatlantického prostoru a země SNS) a v rámci nadnárodních znalostních sítí a konsorcií.

Pilíře tematického zaměření výzkumu a vývoje VŠEM představují tři **dlouhodobé projekty** financované vnějšími poskytovateli, a to (1) *Centrum výzkumu konkurenční schopnosti české ekonomiky* (v rámci programu 1M MŠMT, realizovaný v letech 2005-2011), (2) *Advancing Knowledge-Intensive Entrepreneurship and Innovation for Economic Growth and Social Well-being in Europe* (v rámci 7. Rámcového programu, realizovaný v letech 2009-2012) a (3) *SIMPACT - Boosting the Impact of Social Innovation in Europe through Economic Underpinnings* (v rámci 7. RP, realizovaný v letech 2014-2016). Další mezinárodní výzkumné a expertní projekty, kterých se VŠEM účastní, zahrnují dílčí témata zdrojů a výsledků inovační výkonnosti, a to zejména klíčové umožňující technologie (projekt DanKETwork, 2013-2014), technologickou náročnost zpracovatelského průmyslu (European Manufacturing Survey, od roku 2012), národní inovační systémy (Innovation Performance Review, od roku 2011), inovace pracovního místa (European Workplace Innovation Network, 2013-2015), komparace nástrojů pro sociální inovace (Social Innovation Europe, 2011-2013).

Vnitřní znalostní poptávka výzkumu a vývoje ve vztahu k vysokoškolské výuce realizované VŠEM je financována převážně z vlastních zdrojů a zahrnuje také publikační aktivity a další formy podpory šíření znalostních výsledků. Horizontální dlouhodobý projekt výzkumu a VŠEM pro vnitřní znalostní poptávku zahrnuje *Generátory výkonnosti a konkurenční výhody českých podniků* (realizovaný ve dvouletých cyklech od roku 2012 s podporou Vnitřní grantové agentury VŠEM) strukturovaný do dílčích témat.

Vnitřní zdroje slouží rovněž k podpoře využití výsledků vnějších (zahraničních) znalostních aktivit VŠEM pro aplikaci v domácích podmínkách, a to opět v publikační činnosti (vydávání odborné řady monografií Ročenka konkurenceschopnosti české ekonomiky a časopisu Ekonomické listy, Cena rektora VŠEM), ve vlastní výuce a v individuální nebo institucionální expertize pro další akademické subjekty, organizace veřejné správy a samosprávy, neziskové organizace a podnikový sektor.

V aktivitách podporujících aplikaci a šíření výsledků výzkumu a vývoje spatřuje VŠEM jednu z významných forem své společensky prospěšné a odpovědné mise. Využití výsledků výzkumu a vývoje VŠEM slouží ke zvýšení efektivnosti vynakládaných zdrojů v oblasti rozvojové pomoci (projekt VŠEM v Africe realizovaný od roku 2009) a v oblasti pomoci znevýhodněným skupinám (projekt hodnocení sociálních inovací SozialMarie realizovaný od roku 2012 a projekt rozvoje kapacit pro sociální inovace od roku 2013). VŠEM také podporuje šíření vnějších výsledků výzkumu a vývoje ve formě Ceny Milana Sojky udělované Nadací „Nadání Josefa, Marie a Zdeňky Hlávkových“ (dále jen „Nadání“) od roku 2010.

1.1.2 Gymnázium Elišky Krásnohorské

Gymnázium je nejstarším gymnáziem na území Prahy 4 (bylo založeno v r. 1937). V roce 2002 získala škola čestný název Gymnázium Elišky Krásnohorské, neboť je pokračovatelkou historické tradice prvního dívčího plnohodnotného gymnázia ve střední Evropě.

Ve škole je celkem 14 tříd. Studuje zde celkem 415 studentů. Profesorský sbor gymnázia má v současné době 42 členů včetně vedení školy a zahraničních lektorů anglického a francouzského jazyka. Škola je vybavena dvěma počítačovými učebnami s kapacitou 16 a 17 počítačů, školní knihovnou s 10 počítači a odbornými pracovnami biologie, chemie, fyziky, hudební a výtvarné výchovy. Ve škole je instalováno Wi-Fi.

Během studia absolvuje student povinně výuku dvou živých světových jazyků. Na gymnáziu se vyučuje angličtina, němčina, francouzština. Španělština, čínština a latina se v případě zájmu otevírají jako nepovinné předměty. Škola pořádá pro zájemce z řad studentů zájezdy do Německa, Francie, Itálie, Rakouska a Velké Británie. Součástí některých zájezdů bývá návštěva zahraniční školy. Studenti nově přijatí do 1. ročníku v obou cyklech se zúčastní úvodních seznamovacích kurzů v délce 3-4 dnů na přelomu srpna a září. Škola má svůj pěvecký sbor Campanula, který pravidelně vystupuje i na veřejnosti (koncerty na nuselské radnici, v Domově Sue Ryder). Škola každoročně připravuje vánoční a letní akademii. Dlouhodobá spolupráce probíhá se společností Člověk v tísni a odráží se mimo jiné v realizaci festivalu Jeden svět na Ohradní. Škola se významně zapojuje do ekologických aktivit, což bylo oceněno jejím pozváním do studentské poroty XXX. ročníku mezinárodního festivalu Ekofilm.

Velká pozornost je věnována projektům, do nichž se žáci zapojují (např. Týden Elišky Krásnohorské, Ekodny na Ohradní) a jež žáci i sami iniciují (Krásnohoření, Jeden svět na Ohradní, Běh pro Afriku, adopce na dálku).

1.2 O projektu

O matematice se všeobecně traduje, že patří mezi neoblíbené předměty. Toto tvrzení lze doložit řadou průzkumů na národní i mezinárodní úrovni. Mezi tradičně nejuznávanější průzkumy patří PISA a TIMSS, které se zaměřují na matematickou gramotnost žáků na základních a středních školách. Zapojení České republiky do mezinárodních výzkumů v oblasti měření výsledků vzdělávání umožňuje srovnání výsledků českých žáků s výsledky žáků dalších zemí. Oba zmiňované výzkumy navíc doprovází rozsáhlá dotazníková šetření, která zjišťují faktory ovlivňující získané vědomosti a dovednosti. Prostřednictvím těchto výzkumů má odborná i laická veřejnost také možnost seznámit se s novými trendy v oblasti hodnocení výsledků vzdělávání. Díky tomu, že se oba výzkumy pravidelně opakují, lze také sledovat, jak se mění úroveň vědomostí a dovedností českých žáků s ohledem na změny ve školském systému. Z obou výzkumů je patrné, že současná podoba matematického vzdělávání není studenty adekvátně přijímána a je třeba pracovat na změně v přístupu k výuce matematiky na základních i středních školách. Ve vyučovacích hodinách převládá spíše stereotypní styl výuky s dominantním postavením učitele, což má za následky nižší aktivitu žáků a tím i menší rozvoj vědomostí a dovedností. Frontální výuka a jednostranný důraz na reprodukci poznatků nejsou vhodné pro talentované, ale ani pro slabší žáky z důvodu nízké motivace a jsou izolující i pro samotného učitele, kterého tento způsob výuky nevede k propojování poznatků s jinými předměty, a tedy ani ke spolupráci s jinými učiteli.

1.3 Cíl projektu

Cílem projektu je poskytovat zajímavou formou vysokou kvalitu matematického vzdělání a navýšit tak matematickou gramotnost především současných středoškoláků. Série projektových aktivit dává vzniknout bohatým projektovým výstupům včetně on-line aplikace nabízející soubor mini lekcí poskytovaných prostřednictvím videosekvencí jednoduše pochopitelných matematických návodů, témata jsou provázána s inovací studijního předmětu, jež bude prověřena přímou výukou na středních školách. Aplikace je využitelná rovněž samostatně pro zájemce o rozvoj či opakování znalostí matematiky zaměřené na technické obory vysokých škol.

Vzhledem ke komplexnímu interaktivnímu řešení projekt umožní cílové skupině středoškolských učitelů matematiky zapojit komplexní mezipředmětové výukové metody, sledovat nejnovější technologické trendy a studenty tak s větší pravděpodobností zaujmout pro studium dosud obávaného předmětu. Pro studenty projektové řešení nabízí sofistikovanou a zábavnou metodu výuky umožňující chápat matematiku jako nástroj poznání okolního světa, nikoliv jako soubor vzorců a pouček.

Projekt je rozdělen do sedmi klíčových aktivit, které na sebe logicky navazují a tvoří harmonický a provázaný celek. V průběhu realizace projektu bude detailně koncepčně, metodicky a obsahově připravena inovace vzdělávacího programu, dojde k jejímu testování, implementaci, průběžnému vylepšování na základě zpětné vazby, propagaci a šíření řešení napříč cílovými skupinami – středoškolští učitelé, středoškolští studenti. V závěrečné fázi projektu budou vytvořeny výstupy v podobě článků v odborných a populárně naučných periodicích, příspěvků ve sbornících, budou publikována metodická doporučení, odborná publikace, manuál pro užití aplikace, uspořádána konference projektu a několik tematických workshopů zaměřených na učitele a studenty středních škol. Výstupy projektu a jejich šíření jsou navrženy s ohledem na co nejvyšší efektivnost a racionalizaci použitých zdrojů.

Strategickým cílem projektu je podpořit zájem studentů o matematiku a zvýšit kvalitu vzdělávání v tomto oboru. Jednotlivé dílčí cíle budou plněny v rámci sedmi klíčových aktivit projektu, které jsou zaměřeny na středoškolské studenty a učitele.

Hlavním cílem projektu je prostřednictvím popularizačních technik a technologií zvýšit matematickou gramotnost především středoškolských studentů a dosáhnout inovace vzdělávacího programu. Vysoká pozornost je věnována popularizaci vědního oboru matematika napříč cílovými skupinami projektu a rovněž vůči široké veřejnosti.

Inovace studijního programu spočívá v návrhu koncepce, metodiky, obsahu a technologickém řešení on-line aplikace designované pro přímou výuku matematiky na středních školách, jež je rovněž využitelná jako samostatná vzdělávací pomůcka. Záměr projektu poskytovat zábavnou formou vysokou kvalitu matematického vzdělávání a popularizovat tak vědní obor matematika mezi studenty středních škol a tím podpořit jejich přechod na vysoké školy především technického směru, je naplňován prostřednictvím sledování hlavního cíle.

Dalším cílem projektu je pomocí projektových výstupů umožnit středoškolským pedagogům zapojit do výuky matematiky mezipředmětové výukové metody za využití nejnovějších trendů a technologických řešení. V odborném vzdělávání matematiky tak realizací projektu dojde k podpoře spolupráce pedagogů matematiky s pedagogy odborných předmětů a rovněž k rozvoji spolupráce středoškolských a vysokoškolských pedagogických pracovníků.

Projekt je svým obsahem zaměřen především na studenty středních škol a podporu jejich přechodu na Vysoké školy, obsah je navržen s ohledem na náročnost a tématiku technických Vysokoškolských oborů. Během realizace projektu proběhne výuka v inovovaném vzdělávacím programu po dobu celkem jedenácti měsíců na střední škole, jež je partnerem projektu.

Díky široké paletě navržených výstupů projekt silně přispěje k popularizaci vědního oboru matematika v cílových skupinách.

Klíčové aktivity

ČÍSLO AKTIVITY	NÁZEV AKTIVITY
01	Řízení a administrace projektu
02	Definice výstupů učení a tvorba osnov
03	Metodická a technická koncepce řešení
04	Realizace výstupů KA 02, KA 03
05	Testování řešení
06	Implementace výstupů KA 02, KA 03, KA 04 v praxi
07	Popularizace a šíření projektových výstupů

1.3.1 Popis cílů rozdělených do klíčových aktivit:

Cílem KA02, KA03, KA04 je obohatit výuku matematiky na SŠ o nejmodernější způsoby výuky a využití technologií pro snazší zaujetí studentů a zároveň pro názornou a jasnou výuku předmětu. Proto je vyvíjena v KA02, KA03 a KA04 koncepční výuková pomůcka za přispění odborných pedagogických pracovníků VŠ a SŠ v oblasti matematiky a expertních pracovníků v oblasti IT. Cílem aktivit je rovněž posílení kompetencí pedagogů k didaktickým transformacím učiva, tzn. převedení matematických poznatků do zjednodušené a pochopitelné formy, jejich implementace do interaktivní aplikace pro budoucí využití ve výuce matematiky na SŠ.

Dílčím cílem je podpora spolupráce mezi pedagogy SŠ a VŠ a interinstitucionální spolupráce.

Cílem KA05 Testování řešení je ověření vyvinutého technického nástroje pro výuku v praxi, jeho dílčí úpravy na základě zpětné vazby testovaných skupin a posílení účinnosti a efektivnosti řešení vyvinutého v předchozích klíčových aktivitách. Cílem KA06 je implementovat inovaci do klasické výuky na střední škole včetně přípravy a zajištění dostatečné informovanosti studentů o chystané inovaci ve výuce předmětu. Cílem je potom rozvíjení matematické gramotnosti studentů za využití mezioborové výukové techniky a poskytování vysoké kvality matematického vzdělání zajímavou formou. Tímto způsobem budou studenti podpořeni v přípravě na přechod na vysoké školy technického typu, neboť získané matematické vzdělání bude cíleně směřováno na témata související s technickými obory na VŠ.

Cílem KA07 Popularizace a šíření projektových výstupů je navýšení informovanosti studentů a učitelů středních škol o rozvíjení matematických dovedností vybraným způsobem, prostřednictvím série aktivit směřujících k šíření projektových výstupů. Dílčím cílem je podpora spolupráce mezi pedagogy SŠ a VŠ a interinstitucionální spolupráce.

1.3.2 Cílové skupiny

Projekt je zaměřen na dvě cílové skupiny - středoškolské studenty a středoškolské učitele. U skupiny středoškoláků se soustředíme především na studenty ve druhých, třetích a čtvrtých ročnících studia, respektive na studenty v posledních ročnících před nástupem na vysokou školu či do zaměstnání. Jedná se především o mladé lidi v prezenční formě studia ve věku 16 -19let. Většina z těchto osob bydlí u rodičů, nemá žádné trvalé zaměstnání, teprve sbírají první pracovní zkušenosti prostřednictvím prázdninových a víkendových brigád.

Vysoký podíl svého volného času využívají moderní technologie a jsou zvyklí prostřednictvím technologií komunikovat mezi sebou navzájem i s ostatními lidmi. Sledují nejnovější technologické trendy a dokáží se v nich snadno orientovat a používat je. Snadný přístup k technologiím, jejich chápání jako běžné součásti života středoškolských studentů umožňuje využívat tyto nástroje nejen k volnočasovým, ale i k ostatním životním aktivitám (např. studium či krátkodobé pracovní příležitosti).

Cílová skupina středoškolských pedagogů se skládá z osob, jež jsou zaměstnány ve školství, jejich věk se pohybuje mezi 25ti a 65ti lety věku, cílová skupina je složena z osob s vysokoškolským vzděláním a v našem projektu je zastoupena především pedagogickými pracovníky zaměřenými na oblast matematiky. Středoškolští pedagogové jsou zapojeni do projektu přímo - jako skupina pedagogů participujících v projektovém týmu, ale v projektu počítáme rovněž s dalším zapojením - jako skupina osob, jež patří mezi hlavní zájmové skupiny pro šíření rozsáhlých projektových výstupů (účastníci workshopů, setkání, konferencí, čtenáři odborných časopisů, publikací aj.). Z hlediska používání moderních technologií se většinou jedná o osoby, které s technologiemi pracovat umí v omezené nebo nízké míře, přičemž je lze charakterizovat jakožto skupinu osob využívání moderních technologií nakloněnou.

Lze tedy říci, že přestože vždy nejmodernější řešení nevyužívají, sympatizují s těmito postupy a je snadné je motivovat pro využívání moderních učebních postupů a metod. Pro motivaci je však nutné náležitě tuto skupinu seznámit se smyslem a postupem využití a rovněž s přínosy nových technologických řešení.

Cílová skupina středoškolští studentů je zapojena do realizace projektu především testováním dílčích výstupů a prostřednictvím přímé výuky, kterou mají v předmětu Matematika povinnou. Motivací pro studenty bude studium matematiky zajímavým a zábavným způsobem, kdy jim bude umožněno využívání pro ně přirozených prostředků způsobů výuky za využití vysoké kvality ICT technologií. Dalším motivačním nástrojem je přidaná hodnota v podobě vyšší možnosti uplatnění absolventů SŠ na technických VŠ a ulehčení jim přechodu na VŠ, tedy rozvinutí a adaptace profilu absolventa na požadavky VŠ. Cílová skupina je zapojena v projektu prostřednictvím KA04, KA05, KA06, KA07 . Do klíčové aktivity KA07 budou zapojeni prostřednictvím cíleného šíření projektových výstupů směřovaného na cílovou skupinu středoškolských studentů, jež chtějí rozvinout své matematické schopnosti a dovednosti.

Cílová skupina středoškolských pedagogů je zapojena do všech projektových aktivit. Především se jedná o aktivity projektu, které nezahrnují samotnou projektovou administraci a řízení, ale jsou věnovány odborným činnostem a vlastní realizační náplni projektu. KA 02, Definice výstupů učení a tvorba osnov, KA 03 Metodická a technická koncepce řešení jsou uvažovány pro spolupráci odborných pracovníků, pedagogů SŠ, VŠ a odborných technických pracovníků a ICT specialistů. V KA 05 počítáme s testováním vytvořených dílčích výstupů, kdy je zapojení skupiny SŠ pedagogů zcela klíčové. Při KA 06 Implementace výstupů v praxi počítáme s přímou výukou inovovaného vzdělávacího programu v posledních ročnících střední školy. Do KA 07 budou středoškolští pedagogové zapojeni prostřednictvím účasti na workshopech, konferenci, publikování v populárně naučných a odborných periodicích a prostřednictvím pro tuto skupinu vytvořených nástrojů, které budou SŠ pedagogové používat (metodiky, publikace aj.). Motivací pro zapojení je rozvinutí a obohacení jejich odborných kompetencí, znalostí, navýšení odborné kvalifikace.

2 Hlavní stránka

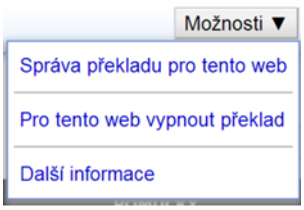
Projekt Matematika VŠEM je zpřístupněn široké veřejnosti především na webových stránkách www.matematika.vsem.cz.

Stránky lze zobrazovat ve všech hlavních prohlížečích nejen z desktopů, ale i z mobilních zařízení (tablety, smartphony), stránky se přizpůsobují velikosti zobrazovacího zařízení.

Hlavní stránka (viz www.matematika.vsem.cz) obsahuje záhlaví se základní nabídkou, pole pro vyhledávání a v pravém Přeložit horním rohu odkaz na překladač Google, který umožňuje zobrazení stránek nejen česky. V průběhu testování se prokázala jeho užitečnost, tým získal reakce uživatelů i v jiných (někdy i neevropských) jazycích.

Po kliknutí na odkaz se zobrazí nabídka jazyků, do kterých může překladač obsah stránek zobrazit:

Možnosti překladače je možno nastavit v roletovém menu „Možnosti“:



Pro rychlé hledání je vpravo v záhlaví umístěno vyhledávací pole  pro rychlé vyhledávání pojmů.

Uprostřed hlavní stránky se nalézají tři články s aktuálními informacemi, členěno na části „Minilekce“, Testování“ a „Spolupráce.

V zápatí hlavní stránky jsou především odkazy na Facebookové stránky projektu MATEMATIKA VŠEM a účet Twitter projektu.

Přehledné zobrazení hlavní stránky, jak byla výše popsána, je na další straně:

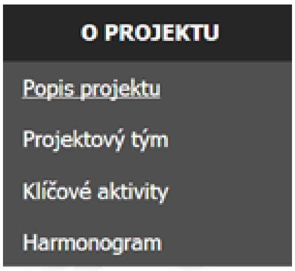
2.1 Základní nabídka

V záhlaví hlavní stránky je především umístěna horizontální základní nabídka:

Nabídka představuje základní uživatelské členění, první a poslední možnost jsou uživatelem využívány spíše občas, naproti tomu aktivní uživatel bude trvale využívat možnosti MINILEKCE a TESTOVÁNÍ a proto jsou jim věnovány samostatné kapitoly, zde je popsáno pouze jejich základní ovládání.

2.1.1 O PROJEKTU

V této nabídce nalezne uživatel jednak základní identifikační údaje o projektu a může též vybrat z roletového menu tyto možnosti:



Popis projektu stručně uvádí informace, které jsou podrobně popsány v předchozí kapitole tohoto manuálu.

Pokud se uživatel chce dozvědět bližší informace o členech projektového týmu, může z nabídky zvolit „**Projektový tým.**“

Další dvě položky „**Klíčové aktivity**“ a „**Harmonogram**“ stručně informují uživatele o daných oblastech, podrobně popsaných v předchozí kapitole.

2.1.2 Minilekce

Jednou z nejdůležitějších položek hlavní nabídky jsou „Minilekce“:

V podnabídce jsou pak uvedena všechna témata, pro které se může uživatel rozhodnout.

Po výběru příslušného tématu se uživateli zobrazí:

- Stručné téze k obsahu tématu.
- Základní pojmy, o nichž téma pojednává.
- Seznam jednotlivých kapitol a videoprezentací (minilekcí) s hypertextovými odkazy na jednotlivá videa v Youtube (video se zobrazují na nové kartě prohlížeče).

Obsahu jednotlivých minilekcí je věnována celá jedna z dalších kapitol tohoto manuálu.

2.1.3 Aktuality

Nabídka „Aktuality“ informuje zatím stručně o jednotlivých fázích testování projektu, není vyloučeno, že bude doplněna o další podsekce podle vývoje projektu po ukončení testování.

2.1.4 Testy znalostí

Druhá nejdůležitější položka hlavní nabídky zpřístupňuje uživatelům systém testování a procvičování jejich znalostí podle jednotlivých okruhů.

Nabídka „Testy znalostí“ obsahuje hypertextové odkazy, které po jejich vybrání zobrazí zadání 5 příkladů. V úvodu uvede uživatel emailovou adresu.

V prohlížeči Google Chrome:

V prohlížeči Mozilla:

2.1.5 POMŮCKY

2.1.6 KONTAKTY

3 Minilekce (se stručným obsahem)

Geometrie má dva poklady: Pythagorovu větu a zlatý řez. První má cenu zlata, druhý připomíná spíše drahocenný kámen.

(Johannes Kepler)

Minilekce je vlastně audio prezentací, tzn. postupně promítaný text je doprovázen slovním komentářem. Dále obsahují i aplikace příslušných oblastí matematiky v jiných oborech a předmětech (fyzika, chemie, informatika, technika, …), v dalším studiu na vysoké škole a samozřejmě také v běžném životě. Audio prezentace jsou doplněny drobnými historickými exkurzemi ohledně vývoje příslušné oblasti. Nenabízíme vám norimberský trychtýř, který byl vynalezen k řešení otázky: „Jak mám udělat zkoušku, aniž bych se učil“? Máme pro vás špatnou zprávu. Norimberský trychtýř se ztratil. Z vyprávění víme, že pro každého studenta je potřebný jiný trychtýř, minimálně jde o čtyři typy.

Učitel národů J. A. Komenský nebyl příznivcem žádné rychlé a snadné „nalejvárny“ vědomostí, ale naopak žádal zdlouhavé a svědomité studium: „Nestačí knihy jen číst, musí být čteny pozorně a nejdůležitější místa musejí být podtržena a vypsána. Podtrhuj v knize, která je tvým majetkem. Dělej si výpisky, ať jde o tvou či cizí knihu. To je totiž ze čtení jediné jisté ovoce, že si čtenář vypisováním přisvojuje to, co četl. Chtít svěřovat věci pouhé paměti znamená zapisovat je do větru, protože naše paměť je prchavá, přijímá mnoho věcí, ale hned je zase pouští a ztrácí, není-li podporována zábradlím písma.“ V Matematice VŠEM je podtrhávání už součástí jednotlivých prezentací.

Kurs Matematika VŠEM je určen základní osnovou:

Úvod

Funkce

Speciální funkce

Komplexní čísla

Kombinatorika

Posloupnosti a řady

Pravděpodobnost

Tato osnova se stala Ariadninou nití pro tvorbu minilekcí, testů i příruček.

Celý kurs začíná úvodními slovy rektora Vysoké školy ekonomie a managementu o. p. s. v Praze 5 prof. Ing. Milana Žáka, CSc. a ředitele Gymnázia Elišky Krásnohorské v Praze 4 – Michli Mgr. Karla Bednáře.

Kapitola 1. – Úvod

1.01 Matematika a její role ve společnosti

Zdá se nám, že příroda je velkým a marnotratným experimentátorem, který má neskonale mnoho prostředků k dispozici a hýří různými pokusy, neboť jak jinak bychom si mohli vysvětlit velkou změnu v různých tvorech, která se odehrávala od okamžiku, kdy se na zemi objevil život? Přepodivné pokusy činila příroda během tří set milionů let, než konečně stvořila gigantickou rasu dinosaurů, kterou však nechala náhle zahynout během krátké doby. Dalších sto milionů let tvořila druh savce, mamuta, před kterým by vyhlížel velký slon jako trpaslík. Ani s tímto tvorem se nespokojila, nemluvě ani o velkém množství různých jiných, kteří všichni zmizeli a učinili místo prozatím poslednímu pokusu – člověku. Jak se přírodě tento poslední pokus podařil či jak je s ním spokojena, nemůžeme dobře říci. Někdy se však zdá, že začíná s ním ztrácet trpělivost, a víme, že její moc je tak značná, že až příliš snadno by ho mohla odkázat do minulosti, jako svá ostatní dřívější díla. Pozorujeme-li totiž člověka, zjišťujeme, že téměř vše je v něm paradoxní. Zajistí-li se někomu blahobyt k tomu, aby se mohl věnovat tvůrčí práci, tak tento člověk zleniví. Dosáhne-li dobyvatel vítězství, zpohodlní. Zbohatne-li štědrý člověk, stane se skrblíkem. Nezáleží na politických doktrínách, které chtějí přispět k rozvoji člověka, nevíme-li, jaký typ člověka se zrodí? Jediný slaboučký pražský rodák Bernard Bolzano, který významně ovlivnil náš pohled na logiku a matematiku, má větší váhu než kdovíkolik úspěšných bezejmenných.

1.01.1 Matematika a její jazyk

Autor jedné z nejoriginálnějších filosofických koncepcí 20. století A. N. Whitehead napsal:

„*První člověk, který si všiml analogie mezi skupinou sedmi ryb a skupinou sedmi dní, udělal pozoruhodný krok v dějinách myšlení. Byl prvním člověkem, který uvažoval o pojmu patřícím do čisté matematiky.*“

Rovněž nikdy nikdo nenakreslil kružnici či bod. Všechny geometrické pojmy jsou idealizovány, jsou absolutně dokonalé, proto nereálné.

Matematika by bez abstrakce, idealizace a fantazie nikdy neexistovala. Domnívat se, že fantazii potřebuje pouze umělec, je hluboký omyl.

Pro vyjádření a sdělení myšlenek si lidstvo vytvořilo geniální prostředek – živou řeč a její písemnou podobu.

V různých oblastech lidské činnosti tak vznikají vlastní jazyky, účelně přizpůsobené přesnému, výstižnému a krátkému vyjádření myšlenek, specifických pro příslušný obor lidské činnosti.

Úplný laik si pod slovem matematika představuje sloupce čísel, množství tabulek logaritmických, úrokovacích či pojišťovacích i souborů nejrůznějších statistických dat apod. Zkušenější pozorovatel má zase tendenci porovnávat matematiku a hromadu jejích vzorců a vzorečků s mlýnkem na kávu. Vhodíš do něj několik údajů, chvilku točíš klikou a dole vypadne žádaný výsledek…

Tím vším matematika není.

1.01.2 Co je matematika?

Smysl matematiky je v hledání a odvozování platných vět povolenými logickými úvahami z daných faktů, které samy o sobě jsou nedokazatelné.

Axiomy, ze kterých vycházíme, bereme z každodenní zkušenosti, z empirických poznatků, nebo také často jen z čistě fiktivních úvah …

Cílem je vytvořit uzavřený systém navzájem si neodporujících vět.

Poznamenejme, že matematické symboly nejen nenechávají prostor nepřesným vyjádřením nebo mlhavým výkladům, ale často dovolují i takové zjednodušení logických postupů a úvah, které vede mnohem rychleji a příměji k výsledku.

1.02 Množiny a logika

1.02.1 Množiny

Matematické objekty mají vesměs abstraktní charakter (ať již jde o čísla, zobrazení, funkce, operace, relace, plochy, struktury, příp. něco jiného) a základním požadavkem je tedy správně rozumět jazyku, jímž matematika o těchto objektech hovoří. Jazyk matematiky v sobě sdružuje prostředky potřebné pro zavádění a popis vlastností matematických objektů a je výsledkem dlouhodobého vývoje. Dnes je možné o jazyce matematiky říci, že jde o množinově logický jazyk matematiky. Jak tato věta napovídá, základním matematickým pojmem je *množina*. Jde o prvotní či primární pojem, tudíž jej nemůžeme definovat. Může jej vymezit filosofie matematiky.

Množina *je souhrn objektů určitých vlastností, které chápeme jako celek.*

Uvedený popis pojmu množina není možné pokládat za její definici. Poznamenejme, že množinu také nelze definovat v nějakém běžném smyslu v elementární logice. Dále si všimněme, že v této filosofické definici slovo souhrn nahrazuje slovo množina.

1.02.2 Logika

Logika je formální věda, zkoumající právě onen způsob vyvozování závěrů. S logikou jsou potíže. Topíme se v problémech a tušíme, že mnohé z nich by byly řešitelné lepším uplatněním logiky. Kvalita myšlení určuje úspěšnost každého jednotlivce i společnosti. Vadné myšlení, ať je to nesprávný výběr argumentů nebo logické chyby, nás stojí obrovské prostředky a vede k frustraci. Logika není empirickou vědou o myšlení; studuje objektivní podmínky správnosti, jinak řečeno je to disciplína studující relaci „vyplývání“. Logika také nezkoumá úplně obecně poznání – to je předmětem filosofické disciplíny epistemologie. Definice logiky – ***nauka o***

správném myšlení – je asi správná, ale dělá nám potíže logiku popsat tak, aby byla srozumitelná. Tyto jednoduché příklady nás vedou k názoru, že **myšlení je takový proces zpracování informace, aby bylo dosaženo nějakého cíle**. Logika je tedy věda o správném vedení tohoto procesu.

Vedle toho, že logika mluví o věci tak notoricky známé, jako je myšlení, má ještě jednu nemilou vlastnost: Vůbec ji totiž nezajímá svět kolem. Nepátrá po obloze jako astronomie, nezkoumá jevy jako třeba optika, ani si nestaví nové světy jako matematika. Vystačí si s tím, co už v hlavě máme. Logika pouze tvoří nové výroky z výroků, které jsou dány.

1.02.2.1 Vznik a vývoj logiky

Logika se vyvinula v samostatnou disciplínu velice dávno, dokonce dříve než aritmetika a geometrie. Jako mnoho dalších věd vznikla logika coby součást filosofie a částečně takové zařazení stále platí. Logika byla spojována s matematickým náhledem už od dob, kdy sama matematika (hlavně geometrie) začala být chápána jako samostatná vědecká disciplína. Thales Milétský byl už v 6. století před naším letopočtem nejen skvělým geometrem, ale uvědomoval si, že dobré poznatky je třeba zdůvodňovat. Ne každý důvod je dobrý. Logicky uvažovat znamená mj. hledat argumenty.

Aristoteles je všeobecně považován za zakladatele logiky a bez nadsázky můžeme říci, že logiky matematické.

Základním stavebním kamenem myšlení a komunikace je *pojem*. Pojem postihuje podstatu věci, ale nesplývá s ní. Vědomí člověka si vytváří pojmy činností, kterou nazýváme *abstrakce*. Začíná od smyslových zkušeností a tam, kde některý smyslový orgán chybí, tam chybí i jistá znalost. Zde se Aristoteles liší od Platona. Lidé se domlouvají pomocí pojmů. Mnohdy ten, kdo se ptá, a ten, kdo odpovídá, nemají na mysli totéž. Proto je třeba věnovat velkou péči přesnému vymezení pojmů, tj. definicím.

Počátek období vývoje moderní logiky (symbolické, matematické) je spjat se jménem G. W. Leibnize (1646 – 1716). Právě on formuloval koncepci nové logiky.

Leibniz stanovil zásadu sporu a zásadu dostatečného důvodu, výslovně formuloval zásadu totožnosti, kterou implicitně znal již Aristoteles.

Na straně druhé teprve „nedávno“ – po dlouhém období stagnace – se znovu začal tento obor rozvíjet. Mohutný impuls dostala logika v 19. století rozvojem algebraických metod v logice.

Třetí (pro logiku velmi významné období) je zrod predikátového počtu. Jeho základem je dílo člověka, který se narodil před sto šedesáti lety, tj. v roce 1848, kdy v Praze zemřel jiný velikán, který významně ovlivnil náš pohled na logiku a matematiku – Bernard Bolzano. Jde o Gottloba Fregeho, kterému vděčíme za predikátový počet, který se stal jedním z nejvýznamnějších nástrojů studia racionální argumentace. Je to náš hlavní nástroj pro formulování teorií i pro analýzu jejich logické struktury.

Dvacáté století přineslo nebývalý rozvoj logiky, zejména při zkoumání základů matematiky. Byly to paradoxy (Russelův, Bourali-Fortiho a dalších), které se objevily na přelomu devatenáctého a dvacátého století při budování teorie množin, jejíž intuitivní základy položili Bernard Bolzano a Georg Cantor.

1.02.2.2 Matematická logika

Logika se výrazně rozvinula i v matematice, a tak je také řazena i do matematiky, a zpravidla se nazývá **matematická logika**.

Termín matematická logika je možno chápat ve dvou různých smyslech:

jde o takovou část logiky, která používá matematické prostředky a metody (v tomto případě hovoříme také o symbolické nebo formální logice),

jde o logiku, která se používá v matematice (tzn. matematika a její jazyk je nejen nástrojem, ale i předmětem teoretických úvah – v takovém případě spíše než o matematické logice hovoříme o metamatematice, tj. o disciplíně, která se věnuje jazyku matematiky).

Brzy ale bude zřejmé, že je velmi obtížné rozlišit, co je primární, zda matematika či logika. To je dáno tím, že z historického vývoje to byla právě matematika, která přinášela a stále přináší podněty pro rozvoj logických zkoumání, a také tím, že snaha vybudovat pro matematiku pevné základy si vyžádala precizovat logické pojmy.

Z tohoto pohledu se nám může zdát vztah matematiky a logiky jako uzavřený kruh, v každém případě značné metodologické hodnoty.

Logika (a také matematická logika) se musí budovat velice opatrně, abychom nedospěli ke sporům, které se také označují jako paradoxy (paradox je jazykový výraz překvapivého významu nebo úsudek s neočekávaným mnohdy protiintuitivním závěrem, z řeckých slov *para*, což znamená zvrácený, a *doxa*, což je myšlenka; ve starověké filosofii nazývaný též antinomie nebo aporie).

1.02.2.3 Výrokový počet

Výrokový počet se zabývá studiem výroků, jejich vytvářením, jejich pravdivostí a jejich odvozováním.

Ani matematicky, ani logicky nelze pojem výrok (podobně jako pojem množina) definovat. Lze jej vymezit pouze filosofickou definicí.

1.02.2.3.1 Logické operace a spojky

V této části zavádíme logické spojky negace, konjunkce, disjunkce, implikace a ekvivalence. Dále se zabýváme pravdivostí a nepravdivostí příslušných operací.

1.02.2.3.2 Karel Čapek psal o logice

Zde se zabýváme logickými chybami, které ilustrujeme i dvěma fejetony Karla Čapka.

1.02.2.3.3 Formule výrokového počtu

Tento odstavec je ve dvou prezentacích.

Definujeme formule výrokového počtu, speciálně se věnujeme tautologiím, hlavně nejdůležitějším z nich, které se běžně používají.

1.02.2.3.4 Kontradikce a splnitelná formule

Definujeme kontradikci a splnitelnou formuli. Dále ilustrujeme na příkladech zjištění, zda formule výrokového počtu je tautologie, nebo splnitelná formule, nebo kontradikce.

1.02.2.3.5 Další logické spojky

Tento odstavec je ve dvou prezentacích.

Zavádíme logické spojky exkluzivní disjunkci (alternativu, XOR), Shefferův operátor (NAND), Peircovu šipku (NOR) a spojku if…then…else, které se používají v informatice. Dále informujeme o šifře XOR, která úzce souvisí s exkluzivní disjunkcí. Také se stručně věnujeme sdělení o logických obvodech.

1.02.2.3.6 Tautologický důsledek

I tento odstavec je uveden ve dvou prezentacích.

Definujeme tautologický důsledek a uvádíme (včetně příkladů) odvozovací (nebo také dedukční) pravidla, např. modus ponendo ponens.

Kapitola 2. – Funkce jedné proměnné

2.01 ÚVOD

Definujeme funkci jedné proměnné, její definiční obor, obor hodnot a graf.

Dále uvádíme různé způsoby, které umožňují definovat funkci jedné proměnné. Pro tyto funkce uvádíme jejich definiční obor, obor hodnot i graf.

2.01.1 Příklady a bonus

V této části uvádíme příklady, ve kterých o různých obrázcích rozhodujeme, zda jde nebo nejde o graf funkce a na závěr prezentace je malé překvapení.

2.01.2 Některé vlastnosti funkcí

Zde se zabýváme rovností a nerovností funkcí. Dále studujeme, zda bod v rovině je nebo není bodem grafu funkce.

MONOTÓNIE FUNKCE

2.02.1 Ryze monotónní funkce

Definujeme funkci prostou v intervalu, rostoucí v intervalu, klesající v intervalu a ryze monotónní v intervalu, dále uvádíme ilustrační příklady a souvislosti mezi těmito pojmy.

2.02.2 Monotónní funkce

Zde zavádíme funkci neklesající v intervalu, nerostoucí v intervalu a monotónní v intervalu a souvislost s pojmy z předcházejícího odstavce. Je zde i dost ilustračních příkladů.

2.03 KONVEXNÍ A KONKÁVNÍ FUNKCE

Definujeme funkci konvexní v intervalu a konkávní v intervalu. Také se zabýváme souvislostí ryzí monotonie funkce v intervalu s konvexností či konkávností funkce v intervalu.

2.04 INVERZNÍ FUNKCE

Definujeme funkci zobrazující interval na interval, dále uvádíme definici inverzní funkce k funkci jedné proměnné a vlastnosti dvojice navzájem inverzních funkcí.

2.05 FUNKCE SUDÁ, LICHÁ A PERIODICKÁ

2.05.1 Funkce sudá a lichá

V této části se zabýváme funkcemi sudými a lichými, ilustrujeme tyto vlastnosti na příkladech.

2.05.2 Funkce periodická

Definujeme periodickou funkci, uvádíme příklady periodických i neperiodických funkcí. V této části jsou ilustrační příklady funkcí sudých, lichých a periodických.

2.06 PRŮSEČÍKY GRAFU FUNKCE

2.06.1 Průsečíky grafu funkce se souřadnicovými osami

Definujeme průsečíky grafu funkce s osou x (někdy také nazývaný nulový bod funkce) a průsečík s osou y. Uvádíme příklady.

2.06.2 Průsečík grafů funkcí

Zavádíme pojem průsečík grafů funkcí a ilustrujeme na příkladech.

2.07 FUNKČNÍ OPERACE

2.07.1 Součet a rozdíl funkcí

Definujeme součet a rozdíl funkce a konstanty, zkoumáme zachování monotonie, konvexnosti, konkávnosti, sudosti, lichosti a periodičnosti. Dále zavádíme součet a rozdíl funkcí, jejich vztah k monotonii, konvexnosti, konkávnosti, sudosti a lichosti.

2.07.2 Součin a podíl funkcí

Definujeme reálný násobek a reálný podíl funkce, zkoumáme vztah s monotonií, konvexností, konkávností, sudostí, lichostí a periodičností. Dále uvádíme součin a podíl funkcí, jejich vztah k monotonii, konvexnosti, konkávnosti, sudosti a lichosti.

2.07.3 Složená funkce

Definujeme složenou funkci vnitřní a vnější funkce od jednodušších případů ke složitějším, také se zabýváme vlastnostmi složené funkce.

Kapitola 3. – Speciální funkce

3.01 KONSTANTNÍ A IDENTICKÁ FUNKCE

V této části zavádíme konstantní a identickou funkci, jejich definiční obory, obory hodnot, grafy, monotonii, konvexnost, konkávnost, sudost, lichost a periodičnost.

3.02 FUNKCE n–TÁ MOCNINA

Definujeme funkci n–tá mocnina ($n \in N$), uvádíme její definiční obor, obor hodnot, graf, monotonii, konvexnost, konkávnost, sudost, lichost a periodičnost.

3.03 POLYNOM n–TÉHO STUPNĚ

Definujeme funkce polynom stupně nejvýše n–tého a polynom stupně právě n–tého ($n \in N$), uvádíme její definiční obor, dále se také zmiňujeme o speciálních případech polynomu (konstantní funkce, lineární funkce, kvadratická funkce, …).

3.03.1 Lineární funkce

Věnujeme se lineárním rovnicím, nerovnicím, lineárním funkcím a funkcím k nim inverzním.

3.03.1.1 Funkce přímá úměrnost

Zavádíme funkci přímá úměrnost a uvádíme její užití.

3.03.2 Kvadratická funkce

V této části se věnujeme řešení kvadratických rovnic a nerovnic v množině všech reálných čísel a probíráme vlastnosti kvadratických funkcí (monotonii, ryzí monotonii, konvexnost a konkávnost).

3.04 Funkce záporná celá mocnina

Definujeme funkci –*n*-tá mocnina, kde *n* je kladné přirozené číslo, a uvádíme její vlastnosti

3.04.1 Funkce nepřímá úměrnost

Definujeme funkci nepřímá úměrnost a její použití.

3.04.2 Racionální funkce

Zavádíme racionální funkce, uvádíme příklady racionálních funkcí i řešení rovnic a nerovnic.

3.05 Funkce *n*–tá odmocnina

Definujeme funkci *n*-tá odmocnina, kde *n* je kladné přirozené číslo, a uvádíme její vlastnosti

3.06 Funkce záporná celá odmocnina

Definujeme funkci –*n*-tá odmocnina, kde *n* je kladné přirozené číslo, a uvádíme její vlastnosti

3.06.1 Iracionální funkce

Definujeme iracionální funkce, jejich definiční obory i řešení iracionálních rovnic.

3.07 Funkce absolutní hodnota

Definujeme absolutní hodnotu reálného čísla, funkci absolutní hodnota i absolutní hodnotu funkce.

3.08 Exponenciální funkce

Definujeme obecnou exponenciální funkci a uvádíme její vlastnosti

3.08.1 Základní exponenciální funkce

Definujeme základní exponenciální funkci jako exponenciální funkci, jejímž základem je Eulerovo číslo.

3.08.1.1 Leonhard Paul Euler

Medailon věnovaný průkopnickému švýcarskému matematiku a fyziku Leonhardu Paulu Eulerovi (15.4.1707 Basilej – 18.9.1783 Petrohrad). Euler je považován za nejlepšího matematika 18. století a za jednoho z nejlepších matematiků vůbec. Byl také velmi plodným autorem knih: jeho sebrané spisy čítají 60 – 80 svazků. Eulerův vliv na matematiku vyjadřuje výrok připisovaný francouzskému matematiku Pierru Simonu de Laplaceovi: „*Čtěte Eulera, čtěte Eulera, je to učitel nás všech*.“

3.08.1.2 Sedm mostů v Königsbergu (Královci)

Euler je tradičně považován za zakladatele teorie grafů, neboť roku 1736 vyřešil úlohu, zda lze projít přes sedm mostů v pruském městě Königsbergu[1] (česky Královci), přičemž každý z nich právě jednou a vrátit se do výchozího místa. To v moderní teorii grafů odpovídá pojmu eulerovský graf.

3.09 Logaritmické funkce

Logaritmické funkce definujeme jako inverzní funkce k obecným exponenciálním funkcím, speciálně se věnujeme dekadickému, přirozenému a binárnímu logaritmu.

3.10 Goniometrické funkce

Zavádíme goniometrické funkce sinus, kosinus, tangens a kotangens, uvádíme jejich vlastnosti a užití těchto funkcí.

3.11 Cyklometrické funkce

Cyklometrické funkce arkus sinus, arkus kosinus, arkus tangens a arkus kotangens definujeme jako inverzní funkce inverzní k funkcím goniometrickým. Pravdivost tohoto tvrzení je na úrovni pravdivosti reklamního sloganu. Proč? Goniometrické funkce v celém svém definičním oboru nejsou prosté, protože funkce sinus, kosinus, tangens a kotangens jsou periodické. Pro určení inverzní funkce bereme tyto funkce vždy v maximálních intervalech, kde jsou tyto funkce ryze monotónní (ryzí monotonie v intervalu je postačující podmínka pro funkci prostou v tomto intervalu, tj. jestliže je funkce ryze monotónní v intervalu, potom je v tomto intervalu prostá).

3.12 Elementární funkce

Definujeme elementární funkce, uvádíme příklady elementárních funkcí a určujeme definiční obory elementárních funkcí

Kapitola 4. – Komplexní čísla

4.01 Úvod

V této části se věnujeme důvodům zavedení komplexních čísel a informativně historickému vývoji komplexních čísel.

[1] Kaliningrad (rusky Калининград, původně německy Königsberg, česky Královec, polsky Królewiec, latinsky Regiomontium, litevsky Karaliaučius) je hlavní město Kaliningradské oblasti, enklávy Ruské federace. Leží při ústí řeky Pregola do Baltského moře. V roce 2007 mělo 422 300 obyvatel. Bývalo metropolí Východního Pruska. Osada Pregnora na místě pozdějšího města byla založena již kolem roku 300 př. n. l., ta ale byla zničena při dobývání Pruska křižáky. Křižáci město založili v roce 1255.Křižáci zde postavili hrad, který v roce 1256 pojmenovali Královská hora v Sambii (Castrum de Coningsberg in Sambia), latinsky Mons Regius (později Regiomontium) na počest českého krále Přemysla Otakara II., který byl v čele křižáckých vojsk během jedné z jejich výprav proti pohanským Prusům.

4.02 MNOŽINA VŠECH KOMPLEXNÍCH ČÍSEL

Definujeme množinu všech komplexních čísel, věnujeme se vztahu komplexních a reálných čísel, zavádíme imaginární jednotku, imaginární a ryze imaginární číslo, absolutní hodnotu komplexního čísla a její vlastnosti, vyjádření komplexního čísla v aritmetickém tvaru, také se věnujeme komplexním jednotkám. Dále interpretujeme komplexní čísla jako body nebo vektory v Gaussově (či Cauchyově) rovině.

4.03 KOMPLEXNĚ SDRUŽENÁ ČÍSLA

Věnujeme se vymezení komplexně sdružených čísel a jejich vlastnostem.

4.04 KVADRATICKÁ ROVNICE

Zde uvádíme řešení kvadratické rovnice s reálnými koeficienty v množině komplexních čísel a ilustrujeme na příkladech.

4.05 GONIOMETRICKÝ TVAR KOMPLEXNÍHO ČÍSLA

Zavádíme vyjádření komplexního čísla v goniometrickém tvaru a některé vlastnosti komplexních čísel v goniometrickém tvaru.

4.06 MOIVREOVA VĚTA

Uvádíme Moivreovu větu a její použití, dále rozšiřujeme na zobecněnou Moivreovu větu a věnujeme se aplikacím.

4.07 BINOMICKÁ ROVNICE

Řešíme binomickou rovnici, uvádíme aplikace i interpretaci řešení v Gaussově rovině.

4.08 KVADRATICKÁ ROVNICE S KOMPLEXNÍMI KOEFICIENTY

Zde uvádíme řešení kvadratické rovnice s komplexními koeficienty v množině komplexních čísel a ilustrujeme na příkladech.

4.09 EULEROVY VZORCE

Věnujeme se Eulerovým vzorcům i vyjádření komplexního čísla v Eulerově (nebo polárním) tvaru.

Kapitola 5. – Kombinatorika

5.01 TROCHU HISTORIE

Uvádíme prehistorii kombinatoriky v Asii až k prvopočátkům v 17. století v Evropě.

5.01.1 Gottfried Wilhelm von Leibniz

Medailon věnovaný německému filosofu, vědci, matematiku, diplomatu, fyzikovi, historikovi a teologu Gottfriedu Wilhelmu von Leibnizovi, píšícímu převážně v latině a francouzštině. Zaujímá důležité místo v dějinách filosofie a dějinách matematiky. Nezávisle na Isaacu Newtonovi objevil diferenciální a integrální počet, jeho způsob zápisu se používá dodnes. Předznamenal myšlenkové pochody, které se později projevily v biologii, medicíně, geologii, teorii pravděpodobnosti, psychologii, jazykovědě či informatice. Studoval práva a filosofii na univerzitě v Lipsku pod vedením Jakuba Thomasia. V sedmnácti letech získal bakalářský titul. Jeho práce nesla název *De principio individuationis* (*O principu individuace*). Poté studoval v Jeně u profesora matematiky Eduarda Weigela. Zde napsal r. 1666 práci *Dissertatio de arte combinatoria* (*Rozprava o umění kombinatoriky*), která je považována za počátek moderní kombinatoriky.

5.02 Kombinatorická pravidla součtu a součinu

Uvádíme kombinatorická pravidla součtu a součinu a jejich použití.

5.03 Permutace

Definujeme permutace bez opakování konečné množiny, určíme jejich počet a aplikujeme v příkladech, Dále zavádíme faktoriál přirozeného čísla, řešíme rovnice a nerovnice s faktoriály.

5.03.1 Permutace jako zobrazení

Zavádíme permutace jako prosté zobrazení množiny $M = \{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n\}$ na sebe samu a ukážeme, že v podstatě nezískáváme nic nového, dále definujeme inverze v permutaci, permutaci sudou a lichou i znamení permutace.

5.03.2 Permutace s opakováním

Definujeme permutace s opakováním a řešíme příklady na permutace s opakováním.

5.04 Variace

Definujeme variace bez opakování konečné množiny, určíme jejich počet a aplikujeme v příkladech.

5.04.1 Variace s opakováním

Definujeme variace s opakováním a řešíme příklady na variace s opakováním.

5.05 Kombinace

Definujeme kombinace bez opakování konečné množiny, určíme jejich počet a aplikujeme v příkladech, Dále zavádíme kombinační čísla, řešíme rovnice a nerovnice s kombinačními čísly.

5.05.1 Kombinace s opakováním

Definujeme kombinace s opakováním a řešíme příklady na kombinace s opakováním i souhrnné příklady na kombinatoriku.

5.06 TĚŽŠÍ PŘÍKLADY

Uvádíme těžší příklady na permutace bez opakování i s opakováním, na variace bez opakování i s opakováním a na kombinace bez opakování i s opakováním.

5.07 BINOMICKÁ VĚTA

Uvádíme binomickou větu, kterou ilustrujeme na příkladech.

Kapitola 6. – Posloupnosti a řady

6.01 POSLOUPNOST

Definujeme posloupnost, její obor hodnot i graf. Dále uvádíme monotonii, omezenost i diferenci posloupnosti a ilustrujeme na příkladech.

6.01.1 Zadání posloupnosti

Uvádíme zadání funkčním předpisem, rozborem případů a rekurentním vzorcem.

6.01.1.1 Fibonacciova posloupnost

Definujeme Fibonacciovu posloupnost a uvádíme její použití

6.01.2 Diference základních posloupností

Zde se věnujeme diferencím základních posloupností, operací s posloupnostmi (součet, rozdíl, součin a podíl)

6.02 ARITMETICKÁ POSLOUPNOST

Definujeme aritmetickou posloupnost a uvádíme její vlastnosti i použití.

6.03 GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST

Definujeme geometrickou posloupnost a uvádíme její vlastnosti i použití.

Kapitola 7 – Pravděpodobnost

7.01 ALEA IACTA EST

Zde uvádíme exkurzi do historie vzniku počtu pravděpodobnosti v souvislosti s úlohou rytíře de Mére a připomínáme roli francouzských matematiků Blaise Pascala a Pierra de Fermatu na zrodu teorie pravděpodobnosti.

4 Testy znalostí

Testy znalostí jsou zatím rozděleny do následujících částí:

Definiční obory elementárních funkcí

Exponenciální funkce, (ne)rovnice

Iracionální funkce, (ne)rovnice

Kombinatorika

Komplexní čísla

Kvadratická funkce, (ne)rovnice

Lineární funkce, (ne)rovnice

Logaritmická funkce, (ne)rovnice

Logika

Posloupnosti a řady

Racionální funkce, (ne)rovnice

U jednotlivých částí uvedeme některé typové příklady.

Definiční obory elementárních funkcí

Funkce $f(x)$ je definována předpisem $f(x)=\sqrt{16-x^2}-\log(2-x)$. Určete její definiční obor $D(f)$.

Funkce $f(x)$ je definována předpisem $f(x)=-\dfrac{\log(16-x^2)}{\sqrt{2-x}}$. Určete její definiční obor $D(f)$.

Funkce $f(x)$ je definována předpisem $f(x)=\dfrac{\log(9x^2-16)}{\sqrt{x+2}}-12\cdot x$. Určete její definiční obor $D(f)$.

Exponenciální funkce, (ne)rovnice

V množině všech reálných čísel řešte nerovnici $3^x>0$.

V množině všech reálných čísel řešte nerovnici $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x<0$.

V množině všech reálných čísel řešte nerovnici $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x>9$.

Funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou definovány předpisy $f(x)=4\cdot 3^{x+1}$ a $g(x)=10-2\cdot 3^{x+2}$. Vypočtěte souřadnice průsečíku grafů těchto funkcí.

Funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou definovány předpisy $f(x)=-5^{-x-2}$ a $g(x)=2\cdot 5^{-x-3}-7$. Vypočtěte souřadnice průsečíku grafů těchto funkcí.

Funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou definovány předpisy $f(x)=5^{x}-5^{x-1}$ a $g(x)=4^{x}$. Vypočtěte souřadnice průsečíku grafů těchto funkcí.

Iracionální funkce, (ne)rovnice

Funkce $f(x)$ je definována předpisem $f(x)=\sqrt{\dfrac{5x+7}{x+4}}$. Určete její definiční obor $D(f)$.

V množině všech reálných čísel řešte rovnici $\sqrt{2x+5}=x-5$.

V množině všech reálných čísel řešte rovnici $\sqrt{2x^2+14}=x-3$.

Funkce $f(x)$ je definována předpisem $f(x)=\sqrt{x^2-3x}$. Určete její definiční obor $D(f)$.

Funkce $f(x)$ je definována předpisem $f(x)=3+5\sqrt[7]{x^2+6x-7}$.

Kombinatorika

Kolik trojciferných čísel, ve kterých se cifry neopakují, lze sestavit z cifer 1, 2, 3, 4 a 5?

1. Dodávka obsahuje 25 výrobků. Kolika způsoby lze z této dodávky vybrat 3 výrobky ke kontrole?
2. V běhu na 100 m startovalo 6 atletů, všichni doběhli do cíle. Kolik je možných pořadí v cíli?
3. Telefonní linka má čtyři čísla. Kolik telefonních linek, ve kterých se čísla neopakují, lze sestavit z cifer 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 , 8, 9, 0.
4. Množina M obsahuje právě n různých prvků. Vypočtěte n, jestliže počet variací 2. třídy bez opakování vytvořených z prvků množiny M je o 28 větší než počet kombinací 2. třídy bez opakování z nich vytvořených.
5. Jestliže M je konečná množina taková, že $|M|=n$, zvětší-li se počet prvků množiny M o dva, zvětší se počet permutací (bez opakování) vytvořených z prvků této množiny 870-krát. Vypočtěte n.

Komplexní čísla

1. Kvadratická rovnice $x^2+px+q=0$, kde p a q jsou reálná čísla, má jeden kořen $x_1=-3+\sqrt{5}\,i$. Vypočtěte $p+q$.

2. Vypočtěte všechny hodnoty reálného parametru p, pro které má rovnice $x^2+2px+1=0$ právě dva různé komplexní komplexně sdružené kořeny.
3. Vypočtěte všechny hodnoty reálného parametru p, pro které má rovnice $(p+5)x^2+4x-p=0$ právě dva různé komplexní komplexně sdružené kořeny.
4. Vypočtěte všechny hodnoty reálného parametru p, pro které má rovnice $px^2+4x-p-5=0$ právě dva komplexní komplexně sdružené kořeny.

Kvadratická funkce, (ne)rovnice

1. Funkce $f(x)$ je definována předpisem $f(x)=x^2+x-6$. Vypočtěte souřadnice všech průsečíků grafu funkce $f(x)$ s osou x.
2. Funkce $f(x)$ je definována předpisem $f(x)=6-x^2-x$. Vypočtěte souřadnice všech průsečíků grafu funkce $f(x)$ s osou y.
3. Funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou definovány předpisy $f(x)=x^2-4x+3$ a $g(x)=2x-5$. Vypočtěte souřadnice všech průsečíků grafů těchto funkcí.
4. Funkce $f(x)$ je definována předpisem $f(x)=-x^2+3x+4$. Určete všechna reálná čísla x, která vyhovují nerovnici $f(x)+2\leq f(x+2)$.
5. Vypočtěte všechny hodnoty reálného parametru p, pro které má rovnice $(p+5)x^2+4x-p=0$ právě dva různé reálné kořeny.
6. Vypočtěte všechny hodnoty reálného parametru p, pro které má rovnice $(p-3)x^2+4x+p=0$ reálné kořeny.

Lineární funkce, (ne)rovnice

1. Vypočtěte číslo $\log_4(32)$.
2. Vypočtěte základ logaritmů c, jestliže $\log_c(4)=2$.
3. V množině všech reálných čísel řešte nerovnici $\log(2-x)<0$.
4. V množině všech reálných čísel řešte nerovnici $\log_{\frac{1}{2}}(x)<2$.
5. V množině všech reálných čísel řešte rovnici $\frac{1}{2}\cdot\log(2x+5)=\log(x-5)$.
6. Funkce $f(x)$ je definována předpisem $f(x)=\log\left(\frac{5x+7}{x+4}\right)$. Určete její definiční obor $D(f)$.
7. Funkce $f(x)$ je definována předpisem $f(x)=\frac{\log(x+3)}{\log(2x+1)}$. Určete její definiční obor $D(f)$.

Logika

1. O formuli výrokového počtu $(q \vee \neg q) \Rightarrow q$ rozhodněte, zda je tautologie, nebo splnitelná formule, nebo kontradikce.
2. O formuli výrokového počtu $\neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$ rozhodněte, zda je tautologie, nebo splnitelná formule, nebo kontradikce.
3. O formuli výrokového počtu $((p \vee q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \vee r))$ rozhodněte, zda je tautologie, nebo splnitelná formule, nebo kontradikce.
4. Jestliže *p* a *q* jsou výroky takové, že *q* je pravdivý, označte všechny formule, které jsou určitě pravdivé: $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$, $p \oplus q$, $p \mid q$.

Posloupnosti a řady

1. V geometrické posloupnosti je první člen $a_1 = 3$, vypočtěte všechny hodnoty kvocientu q tak, aby součet prvních tří členů posloupnosti $s_3 < 21$.
2. V geometrické posloupnosti je první člen $a_1 = 2$, vypočtěte všechny hodnoty kvocientu q tak, aby součet prvních tří členů posloupnosti $s_3 \geq 42$.
3. Geometrická posloupnost (a_n) je definována předpisem: pro všechna kladná přirozená čísla *n* je $a_n = \dfrac{m \cdot 3^{n+1}}{(m+1)^n}$, kde *m* je reálný parametr. Vypočtěte všechny hodnoty reálného parametru *m* tak, aby pro kvocient *q* platilo: $|\, q \,| < 1$.

Racionální funkce, (ne)rovnice

1. Funkce $f(x)$ je definována předpisem $f(x) = \dfrac{1-3x}{x+4}$. Určete všechna reálná čísla x, která vyhovují nerovnici $f(x) \leq 2$.
2. V množině všech reálných čísel řešte nerovnici $\dfrac{(x-1)\cdot(x+3)}{x^2+16} \geq 0$.
3. V množině všech reálných čísel řešte nerovnici $\dfrac{(x-1)\cdot(x+3)}{x^2-16} \geq 0$.
4. V množině všech reálných čísel řešte nerovnici $\dfrac{x^2+4}{x^2-1} \geq 0$.

Evropský sociální fond
Praha a EU – Investujeme do vaší budoucnosti

5 Přehled vzorečků používaných při výkladu a potřebných pro testy

5.1 Logika

logická spojka	***zapíšeme***	***čteme***	***česky***
negace	$\neg\alpha$	non α	není pravda, že α
konjunkce	$\alpha \wedge \beta$	α et β	α a (současně) β
disjunkce	$\alpha \vee \beta$	α vel β	α nebo[2] β
implikace	$\alpha \Rightarrow \beta$	α implikuje β	jestliže α, potom β, α je postačující podmínka pro β, β je nutná podmínka pro α
ekvivalence	$\alpha \Leftrightarrow \beta$	α je ekvivalentní β	α právě tehdy, jestliže β

p	$\neg p$
0	**1**
1	**0**

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
0	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**
1	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

Logická operace $p \oplus q$ se nazývá ***exkluzivní disjunkce*** (příp. ***alternativa***, příp. ***nonekvivalence***, příp. ***vylučovací nebo***, příp. ***XOR***[3]). Formuli $p \oplus q$ čteme česky: *buď* p, *nebo* q. Logická operace $p \mid q$ se nazývá ***Shefferův operátor*** (příp. ***nonkonjunkce***, příp. ***NAND***[4]). Shefferův operátor vyjadřuje neslučitelnost výroků a formuli $p \mid q$ také česky lze číst: *nikoli* p *a* q *současně*. Logická operace $p \downarrow q$ se nazývá **Peirceova šipka** (příp. ***Nicodův***

[2] Spojku *nebo* v českém jazyce je možno chápat jako spojku **vylučovací** (složený výrok je pravdivý, je-li pravdivý právě jeden z obou základních výroků) i **nevylučovací** (složený výrok je pravdivý, je-li pravdivý alespoň jeden z obou základních výroků), v latině spojka *vel* vyjadřuje *nebo* v *nevylučovacím smyslu,* proto v matematické logice (a tudíž i v matematice) ji budeme **vždy chápat v nevylučovacím smyslu.** Latina pro spojku *nebo* ve vylučovacím smyslu má výraz *aut…aut…*, česky obvykle spojku *nebo* ve vylučovacím smyslu vyjadřujeme *buď…*, *nebo…*

[3] Termín *XOR* je odvozen z anglického *exclusive or*, tj. vylučovací nebo.

[4] Termín *NAND* je odvozen z anglického *not and* (ne a), protože jde o negaci konjunkce.

operátor, příp. **nondisjunkce**, příp. ***NOR***[5]). Pierceova šipka vlastně představuje oboustranný zápor, proto formuli $p \downarrow q$ česky čteme: *ani* p, *ani* q.

p	q	$p \oplus q$	$p \mid q$	$p \downarrow q$
0	**0**	**0**	**1**	**1**
0	**1**	**1**	**1**	**0**
1	**0**	**1**	**1**	**0**
1	**1**	**0**	**0**	**0**

Pracujeme s unární spojkou (negace) a binárními spojkami (konjunkce, disjunkce, implikace, ekvivalence, exkluzivní disjunkce, Shefferův operátor, Peircova šipka, můžeme samozřejmě konstruovat logické spojky spojující víc než dva výroky. S takovými spojkami se setkáváme zřídka. Častější použití má triární spojka **if**…**then**…**else**…, kterou dobře znají a používají programátoři. Nemá speciální značku, zapisujeme ji ***if*** *p* ***then*** *q* ***else*** *r*, stejně ji čteme (česky „*jestliže p, potom q, jinak r*“).

p	*q*	*r*	***if*** *p* ***then*** *q* ***else*** *r*
0	0	0	**0**
0	0	1	**1**
0	1	0	**0**
0	1	1	**1**
1	0	0	**0**
1	0	1	**0**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

5.2 Množiny

Množina je souhrn objektů určitých vlastností, které chápeme jako celek.

Připouštíme množinu, která neobsahuje žádné prvky, nazývá se prázdná množina a značí se symbolem $\emptyset$.

[5]Termín *NOR* je odvozen z anglického *not or* (ne nebo), protože jde o negaci disjunkce.

Jsou-li a a b prvky, potom $\{a,b\}=\{b,a\}$, tj. nezáleží na pořadí zápisu prvků a a b v množině. Množina $\{a,b\}$ je neuspořádaná dvojice prvků a a b.

a) Množina A je **podmnožina množiny** B (a označíme $A \subset B$ nebo $B \supset A$), jestliže pro každé $x \in A$ platí $x \in B$.

b) Jsou-li A a B množiny, potom

i) **sjednocení množin** A a B je množina $A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$,

ii) **průnik množin** A a B je množina $A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}$,

iii) **rozdíl množin** A a B je množina $A - B = \{x; x \in A \wedge x \notin B\}$,

iv) **množiny** A a B jsou **disjunktní**, jestliže $A \cap B = \emptyset$.

V mnoha úvahách potřebujeme zapsat prvky a a b tak, aby bylo důležité jejich pořadí.

Uspořádaná dvojice prvků a a b, kterou zapisujeme buď $[a,b]$, nebo (a,b), je seznam prvků a a b. Tzn. pro libovolné prvky a, b, c a d, platí $[a,b]=[c,d]$ právě tehdy, jestliže $a=c$ a současně $b=d$. Který zápis pro uspořádanou dvojici prvků použijeme, závisí na interpretaci. Jsou-li a a b reálná čísla, potom $[a,b]$ je bod v rovině a (a,b) představuje dvojrozměrný vektor.

Jsou-li A a B množiny, potom **kartézský součin množin** A a B je množina

$A \times B = \{\ [x,y]\ ;\ x \in A \wedge y \in B\}$.

Číselné množiny

Množinu všech přirozených čísel značíme symbolem N_0, symbolem N označíme množinu všech kladných přirozených čísel; musí platit $N = N_0 - \{0\}$. Zapíšeme-li obě množiny jejich prvky, dostáváme $N_0 = \{\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots\}$ a $N = \{\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots\}$.

Množinu všech celých čísel značíme Z, tj. $Z = \{\ldots,-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ldots\}$, množinu všech racionálních čísel Q a množinu všech reálných čísel R. Množinu všech reálných čísel také zapisujeme jako interval, tj. $R = (-\infty, \infty)$.

Zobrazení

Jsou-li A a B množiny, potom f je **zobrazení množiny** A **do množiny** B, jestliže

a) $f \subset A \times B$ a

b) ke každému $x \in A$ existuje právě jedno $y \in B$ takové, že $[x,\ y] \in f$.

Jestliže f je zobrazení množiny A do množiny B, potom

a) **definičním oborem zobrazení** f, který značíme $D(f)$, rozumíme množinu A, tj.

$$D(f) = A,$$

b) **oborem hodnot zobrazení** f, který značíme $H(f)$, rozumíme množinu

$$H(f) = \{y;\ [x,\ y] \in f\}.$$

Jestliže f je zobrazení množiny A do množiny B, potom f je **zobrazení množiny** A **na množinu** B, jestliže $H(f) = B$.

Jestliže f je zobrazení množiny A do množiny B, potom f je **prosté zobrazení množiny** A **do množiny** B, jestliže pro libovolná x_1 a x_2 z $D(f)$ taková, že $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Jestliže f je zobrazení množiny A do množiny B, potom f je **vzájemně jednoznačné zobrazení množiny** A **na množinu** B, jestliže f je prosté zobrazení množiny A do množiny B a je zobrazení množiny A na množinu B.

5.3 Mocniny

Pro libovolná reálná čísla (resp. komplexní čísla) a a b platí:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b),$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$

$$a^3 + b^3 = (a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2),$$

$$a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2).$$

Pro libovolné nezáporné reálné číslo a, pro libovolná kladná přirozená čísla m a n platí:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

Pro každé reálné číslo a platí: $\sqrt{a^2} = |a|$.

Jestliže a, b, x a y jsou reálná čísla taková, že $a > 0$ a $b > 0$, potom platí:

$a^x > 0$, $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$, $(ab)^x = a^x \cdot b^x$ a $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

5.4 Kvadratická rovnice

Jestliže $ax^2 + bx + c = 0$ je kvadratická rovnice, kde a, b a c jsou reálná čísla taková, že $a \neq 0$,

jestliže diskriminant $D = b^2 - 4ac > 0$, potom tato rovnice má v množině všech komplexních čísel C právě dva různé reálné kořeny $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ a $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, tj. pro všechna reálná čísla x platí: $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$,

jestliže diskriminant $D = b^2 - 4ac = 0$, potom tato rovnice má v množině všech komplexních čísel C právě jeden dvojnásobný reálný kořen $x_0 = -\frac{b}{2a}$, tj. pro všechna reálná čísla x platí: $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_0)^2$,

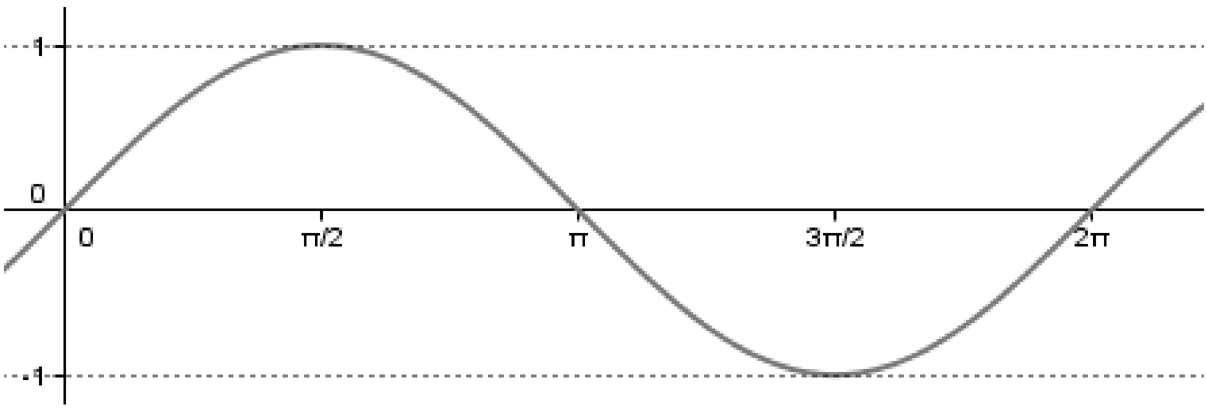
jestliže diskriminant $D = b^2 - 4ac < 0$, potom tato rovnice má v množině všech komplexních čísel C právě dva různé komplexní komplexně sdružené kořeny $x_1 = \frac{-b+i\sqrt{|D|}}{2a}$ a $x_2 = \frac{-b-i\sqrt{|D|}}{2a}$, tj. pro všechna komplexní čísla x platí:

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2).$$

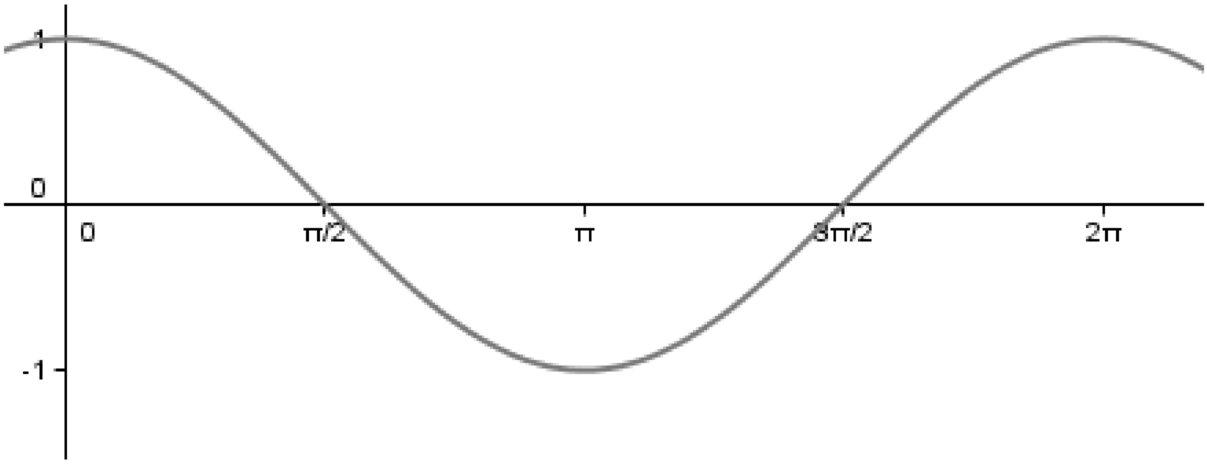
5.5 Goniometrické funkce

$D(\sin) = D(\cos) = (-\infty, \infty)$, $D(\mathrm{tg}) = R - \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi;\ k \in Z\right\}$, $D(\mathrm{cotg}) = R - \{k \cdot \pi;\ k \in Z\}$,

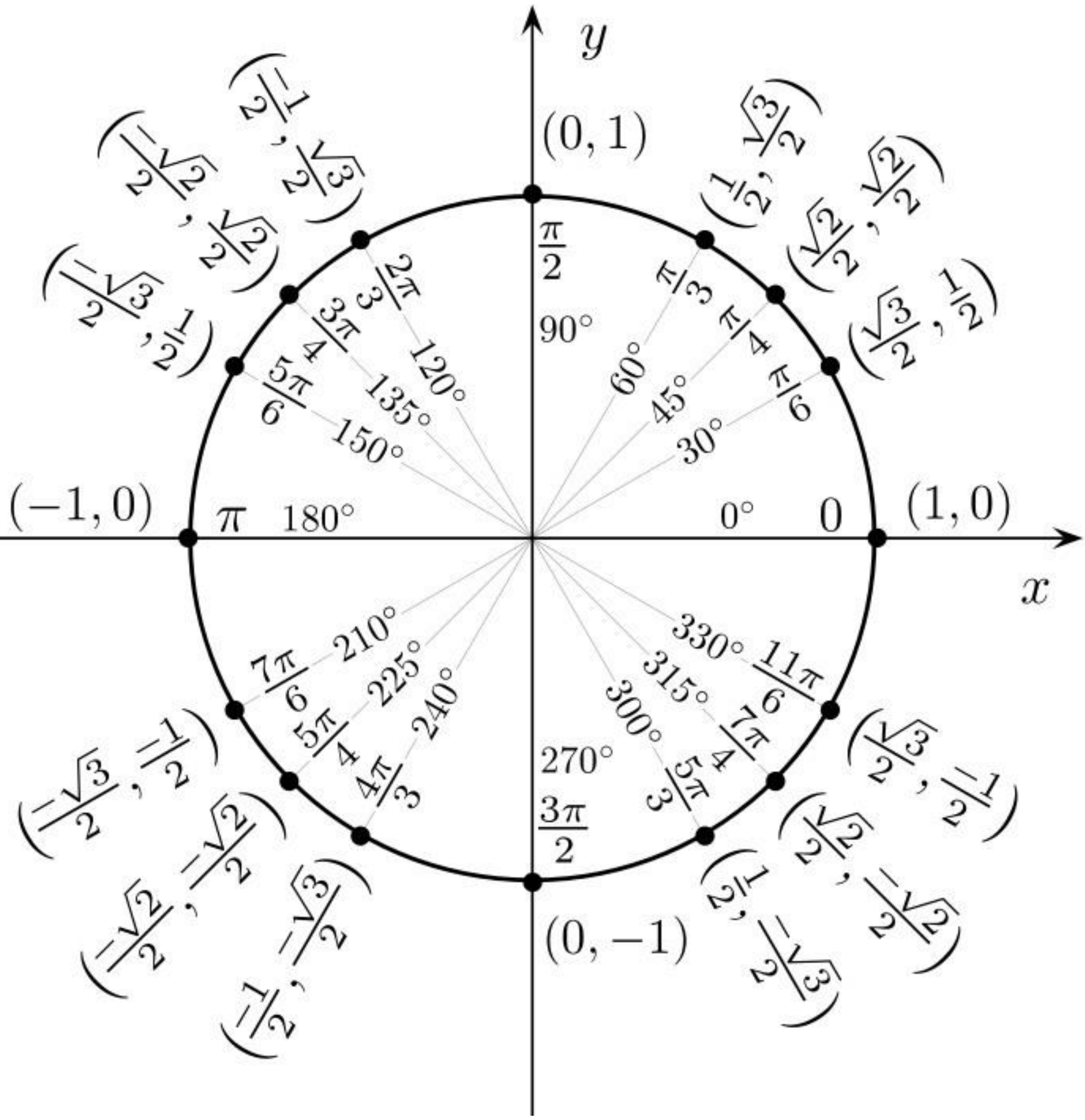
$H(\sin) = H(\cos) = \langle -1,\ 1 \rangle$ a $H(\mathrm{tg}) = H(\mathrm{cotg}) = (-\infty, \infty)$.



Graf funkce $\sin(x)$



Graf funkce $\cos(x)$



Jednotková kružnice

Tabulka vybraných funkčních hodnot funkcí sin x a cos x

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\left(\pi,\ \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-$	$-$
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-$	$+$

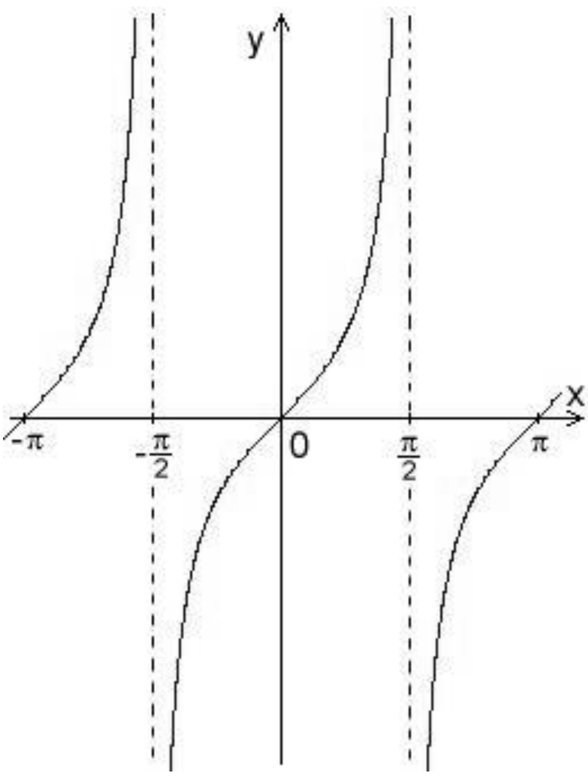
Pro všechna reálná čísla x i y a všechna celá čísla k platí:

$\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$, $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$,

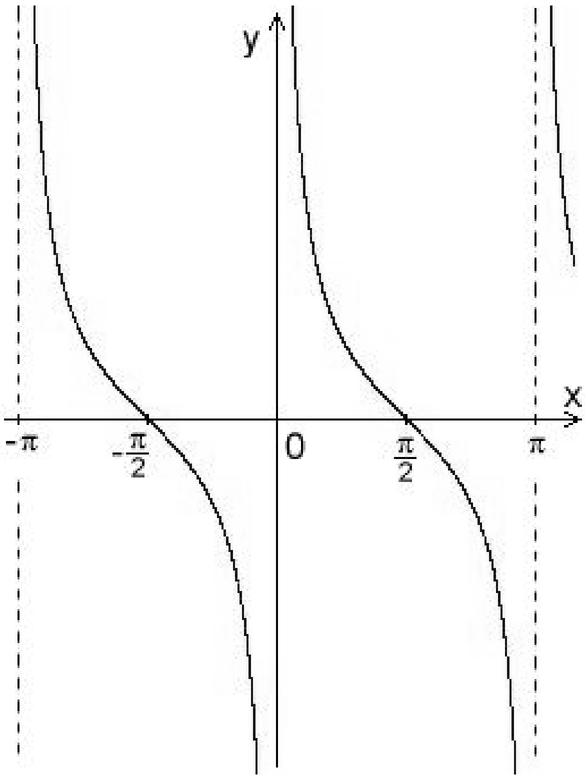
$\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$, $\cos(-x) = \cos(x)$, $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$,

$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cdot \cos^2 x - 1 =$

$= 1 - 2 \cdot \sin^2 x$.



Graf funkce $\mathrm{tg}(x)$



Graf funkce $\mathrm{cotg}(x)$

Tabulka vybraných funkčních hodnot funkcí tg x a cotg x

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
tg x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$*$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cotg x	$*$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$*$

Symbol $*$ označuje tvrzení „funkce v daném bodu není definována“.

5.6 Exponenciální a logaritmické funkce

Jestliže a je reálné číslo takové, že $a \in (0,1) \cup (1,\ \infty)$,

potom pro funkce $f(x) = a^x$ a $g(x) = \log_a x$ platí:

$D(f) = H(g) = (-\infty, \infty)$ a $D(g) = H(f) = (0, \infty)$,

pro $a \in (0,1)$ je funkce $f(x)$ (resp. $g(x)$) klesající v intervalu $(-\infty, \infty)$ (resp. $(0, \infty)$),

pro $a \in (1,\ \infty)$ je funkce $f(x)$ (resp. $g(x)$) rostoucí v intervalu $(-\infty, \infty)$ (resp. $(0, \infty)$).

Pro všechna $x \in (-\infty, \infty)$ a $y \in (0, \infty)$ platí: $y = a^x$ právě tehdy, jestliže $x = \log_a y$.

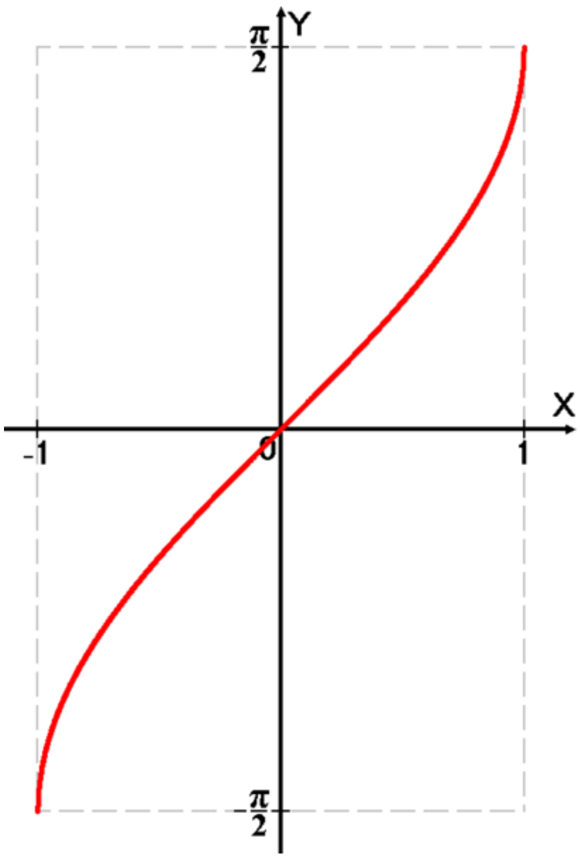
Pro všechna reálná čísla z a pro všechna kladná reálná čísla x a y platí:

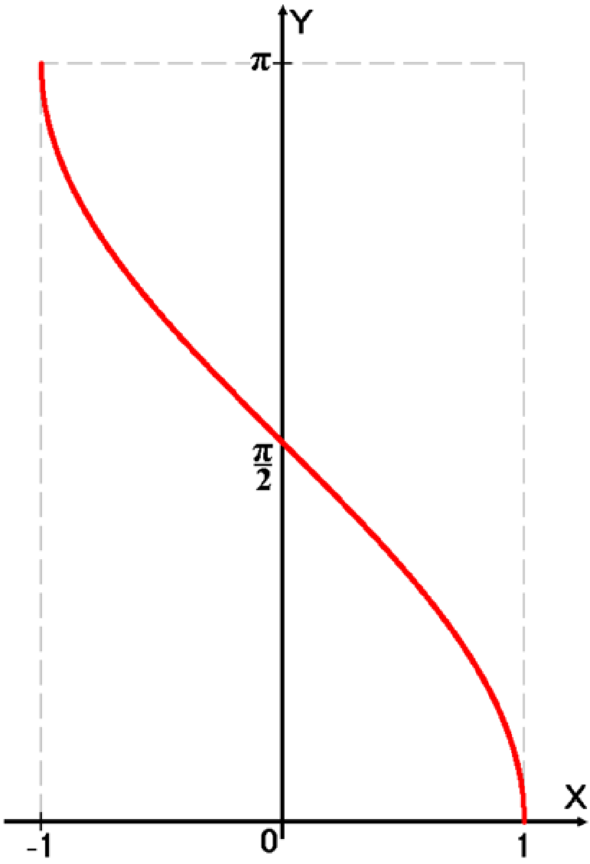
$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$, $\log_a x^z = z \cdot \log_a x$,

$a^{\log_a x} = x$ a $\log_a(a^z) = z$.

5.7 Cyklometrické funkce

$D(\arcsin) = \langle -1,\ 1 \rangle$, $H(\arcsin) = \langle -\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} \rangle$, $D(\arccos) = \langle -1,\ 1 \rangle$, $H(\arccos) = \langle 0,\ \pi \rangle$,





Graf funkce arkussinus

Graf funkce arkuskosinus

$$\forall_{x \in \left\langle -\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} \right\rangle} \forall_{y \in \langle -1,\ 1 \rangle} (y = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin y), \quad \forall_{x \in \left\langle -\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} \right\rangle} (\arcsin(\sin x) = x), \quad \forall_{x \in \langle -1,\ 1 \rangle} (\sin(\arcsin x) = x),$$

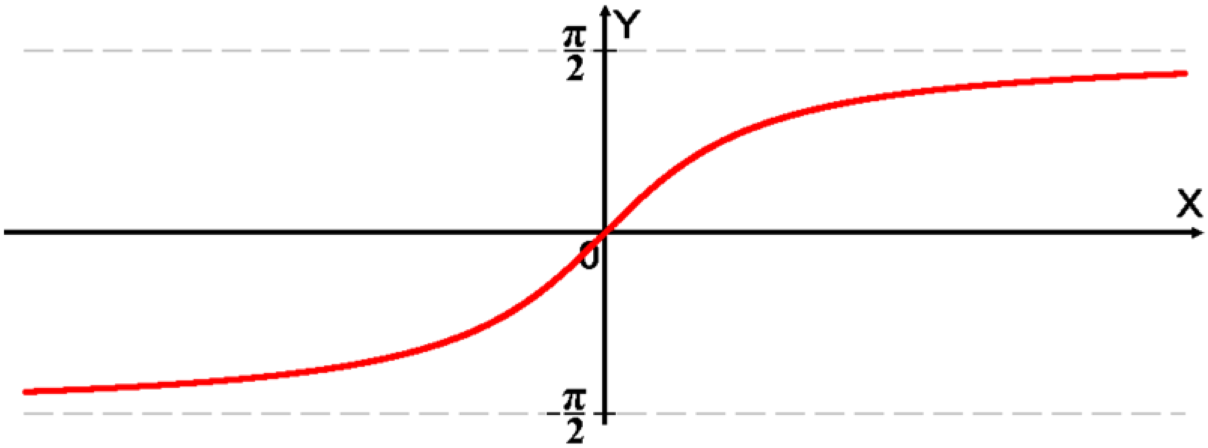
$$\forall_{x \in \langle 0,\ \pi \rangle} \forall_{y \in \langle -1,\ 1 \rangle} (y = \cos x \Leftrightarrow x = \arccos y), \quad \forall_{x \in \langle 0,\ \pi \rangle} (\arccos(\cos x) = x), \quad \forall_{x \in \langle -1,\ 1 \rangle} (\cos(\arccos x) = x),$$

$$\forall_{x \in \langle -1,\ 1 \rangle} \left(\arcsin\ x + \arccos\ x = \frac{\pi}{2} \right).$$

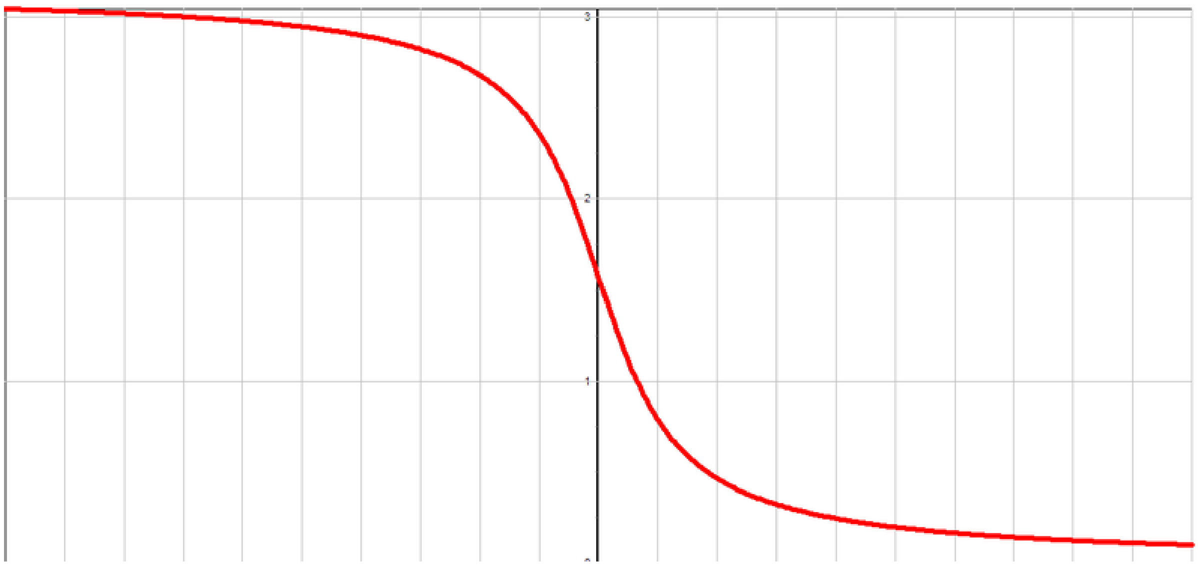
Tabulka vybraných funkčních hodnot funkcí arcsin *x* a arccos *x*

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

$D(\operatorname{arctg}) = (-\infty,\ \infty),\ H(\operatorname{arctg}) = \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right),\ D(\operatorname{arccotg}) = (-\infty,\ \infty),\ H(\operatorname{arccotg}) = (0,\ \pi),$



Graf funkce arkustangens



Graf funkce arkuskotangens

$$\forall_{x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)} \forall_{y\in(-\infty,\ \infty)} (y = \operatorname{tg}\ x \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg}\ y),\quad \forall_{x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)} (\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\ x) = x),\quad \forall_{x\in(-\infty,\ \infty)} (\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\ x) = x),$$

$$\forall_{x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)} \forall_{y\in(-\infty,\ \infty)} (y = \operatorname{cotg}\ x \Leftrightarrow x = \operatorname{arccotg}\ y),\quad \forall_{x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)} (\operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg}\ x) = x),$$

$$\forall_{x\in(-\infty,\ \infty)} (\operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg}\ x) = x),\quad \forall_{x\in(-\infty,\ \infty)} \left(\operatorname{arctg}\ x + \operatorname{arccotg}\ x = \frac{\pi}{2}\right).$$

Tabulka vybraných funkčních hodnot funkcí arctg x a arccotg x

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
arctg x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
arccotg x	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

5.8 Komplexní čísla

Jsou-li a a b libovolná reálná čísla, komplexní číslo z je v algebraickém tvaru, jestliže $z = a + bi$, kde reálné číslo a (resp. b) je reálná (resp. imaginární) část komplexního čísla z a i je imaginární jednotka.

Pro libovolné $n \in N_0$ platí: $i^{4n+1} = i^1 = i$, $i^{4n+2} = i^2 = -1$, $i^{4n+3} = i^3 = -i$,

$i^{4n+4} = i^4 = 1$.

Pro libovolná komplexní čísla $z = a + bi$ a $u = c + di$, kde a, b, c a d jsou reálná čísla, platí: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $z \pm u = (a \pm c) + (b \pm d)i$, $z \cdot u = (ac - bd) + (ad + bc)i$,

$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$.

Je-li $z = a + bi$ ($a \in R$ a $b \in R$) nenulové komplexní číslo, potom goniometrický tvar komplexního čísla z je $z = |z| \cdot (\cos\alpha + i \sin\alpha)$, kde $\cos\alpha = \frac{a}{|z|}$ a $\sin\alpha = \frac{b}{|z|}$.

Zobecněná Moivreova věta.

Pro libovolné nenulové komplexní číslo $z = |z| \cdot (\cos\alpha + i \sin\alpha)$ a libovolné celé číslo n platí: $z^n = |z|^n \cdot (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha))$.

5.9 Kombinatorika

Pro $n \in N_0$ symbolem $n!$, který čteme n–faktoriál, označíme

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{jestliže} \quad n = 0, \\ n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1, & \text{jestliže} \quad n > 0. \end{cases}$$

Jsou-li n a k přirozená čísla taková, že $0 \le k \le n$, potom kombinačním číslem $\binom{n}{k}$ (které čteme n nad k) rozumíme $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

Jestliže jsou n a k přirozená čísla, jestliže $0 \leq k \leq n$, potom $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,

jestliže $0 \leq k < n$, potom $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ (**Pascalovo pravidlo**),

potom $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ a $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.

Počet permutací – jestliže M je konečná množina taková, že $|M| = n \in N_0$, potom počet všech permutací n–prvkové množiny M (bez opakování), který se označuje $P(n)$, je

$$P(n) = \begin{cases} 1 = 0!, \text{ jestliže } n = 0, \\ n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 = n!, \text{ jestliže } n > 0. \end{cases}$$

Počet permutací s opakováním – jestliže $M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ je konečná množina taková, že $|M| = n \in N_0$ a $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ jsou kladná přirozená čísla, potom počet všech permutací $(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)$–té třídy n–prvkové množiny M s opakováním, který se označuje $P'(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)$, je $P'(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n) = \frac{(k_1+k_2+k_3+\dots+k_n)!}{k_1!\cdot k_2!\cdot k_3!\cdot\ldots\cdot k_n!}$.

Počet variací – jestliže M je konečná množina a k přirozené číslo takové, že $|M| = n \in N_0$ a $0 \leq k \leq n$, potom počet všech variací k–té třídy n–prvkové množiny M (bez opakování), který se označuje $V_k(n)$, je $V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Počet variací s opakováním – Jestliže M je konečná množina taková, že $|M| = n \in N_0$, a k přirozené číslo, potom počet všech variací k–té třídy n–prvkové množiny M s opakováním, který se označuje $V'_k(n)$, je $V'_k(n) = n^k$.

Počet kombinací – jestliže M je konečná množina a k je přirozené číslo takové, že

$|M| = n \in N_0$ a $0 \leq k \leq n$, potom počet všech kombinací k–té třídy n–prvkové množiny M (bez opakování) je $C_k(n) = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Počet kombinací s opakováním – Jestliže M je konečná množina taková, že $|M| = n \in N_0$, a k je přirozené číslo, potom počet všech kombinací k–té třídy n–prvkové množiny M s opakováním, který označíme $C'_k(n)$, je $C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$.

Binomická věta.

Pro všechna komplexní čísla a a b i pro libovolné přirozené číslo n platí:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n,$$

příp. užitím sumace

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

.

5.10 Posloupnosti

Posloupnost (a_1, a_2, a_3,…, a_n,…) (dále budeme značit (a_n)) se nazývá aritmetickou (resp. geometrickou), jestliže existuje reálné číslo d (resp. q) takové, že pro všechna kladná přirozená čísla n platí: $a_{n+1} = a_n + d$ (resp. $a_{n+1} = a_n \cdot q$). Reálné číslo d (resp. q) se nazývá diferencí (rep. kvocientem) aritmetické (resp. geometrické) posloupnosti.

Pro libovolné kladné přirozené číslo n v aritmetické posloupnosti (a_n) s diferencí d platí: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ a součet prvních n členů této posloupnosti je $s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$.

Pro libovolné kladné přirozené číslo n v geometrické posloupnosti (a_n) s kvocientem q platí: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ a součet prvních n členů této posloupnosti je $s_n = \begin{cases} a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}, & \text{jestliže } q \neq 1, \\ n \cdot a_1, & \text{jestliže } q = 1. \end{cases}$

6 Rejstřík

A

absolutní hodnota – viz **funkce absolutní hodnota**

absolutní hodnota komplexního čísla (4.02)

algebraický tvar komplexního čísla – viz **vyjádření komplexního čísla v algebraickém tvaru**

alternativa – viz **XOR**

B

binomická rovnice (4.07) – ***binomickou rovnicí*** *n*–***tého řádu****, kde n je kladné přirozené číslo, rozumíme rovnici* $x^n = u$*, kde u je komplexní číslo*

binomická věta (5.07)

C

C označuje množinu všech komplexních čísel

Cauchyova rovina – viz **Gaussova rovina**

Č

D

dedukční pravidlo (1.02.2.3.6)

definiční obor elementární funkce zpravidla ztotožňujeme s maximální množinou existence jejího početního předpisu

definiční obor funkce – viz funkce jedné proměnné

definiční obor zobrazení – *jestliže f je zobrazení množiny* A *do množiny* B*, potom* ***definičním oborem zobrazení*** f*, který značíme* $D(f)$*, rozumíme množinu* A, tj. $D(f) = A$

disjunkce (1.02.2.3.1)

disjunkce výroků (1.02.2.3.1)

E

ekvivalence (1.02.2.3.1)

ekvivalence výroků (1.02.2.3.1)

elementární funkce jsou funkce, které vzniknou ze základních elementárních funkcí užitím operací: sčítání, odčítání, násobení, dělení a skládání funkcí

Eulerovo číslo e (3.08.1) je iracionální číslo, jehož číselná hodnota je přibližně

$e \approx 2{,}718281828459045235360287471352662497757\ldots$

Eulerovy vzorce (4.09)

Eulerův tvar komplexního čísla – viz **vyjádření komplexního čísla v Eulerově tvaru**

exkluzivní disjunkce – viz **XOR**

exponenciální funkce – viz **obecná exponenciální funkce**

F

faktoriál (5.03) – pro $n \in N_0$ symbolem $n!$, který čteme n–faktoriál, označíme

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{jestliže} \quad n = 0, \\ n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1, & \text{jestliže} \quad n > 0. \end{cases}$$

formální logika – viz **matematická logika**

formule výrokového počtu (1.02.3.3)

funkce – viz **funkce jedné proměnné**

funkce absolutní hodnota (3.07) je funkce $g(x)$ definovaná předpisem:

pro všechna $x \in (-\infty,\ \infty)$ je $g(x) = |x|$

funkce elementární – viz **elementární funkce**

funkce exponenciální – viz **obecná exponenciální funkce**

funkce identická – viz **identická funkce**

funkce inverzní – viz **inverzní funkce**

funkce iracionální – viz **iracionální funkce**

funkce jedné proměnné (2.01) – *$f(x)$ je **funkce jedné proměnné** (nebo zkráceně **funkce**), jestliže f je přesný předpis, který každému reálnému číslu x přiřazuje nejvýše jedno reálné číslo $y = f(x)$, které nazýváme funkční hodnotou funkce f v bodě x. **Definiční obor funkce***

$f(x)$, který značíme $D(f)$, je množina všech reálných čísel x, pro která existuje funkční hodnota $y = f(x)$

funkce klesající – viz **klesající funkce**

funkce konkávní – viz **konkávní funkce**

funkce konstantní – viz **konstantní funkce**

funkce konvexní – viz **konvexní funkce**

funkce kubická – viz **kubická funkce**

funkce kvadratická – viz **kvadratická funkce**

funkce lichá – viz **lichá funkce**

funkce lineární – viz **lineární funkce**

funkce logaritmické – viz **logaritmické funkce**

funkce logaritmus o základu a (3.09), kde $a \in (0,1) \cup (1, \infty)$, je funkce g taková, že každému kladnému reálnému číslu x přiřazuje funkční hodnotu $g(x) = \log_a x$

funkce monotónní – viz **monotónní funkce**

funkce n**–tá mocnina** (3.02) je funkce h, která každému reálnému číslu x přiřazuje funkční hodnotu $h(x) = x^n$, kde n je kladné přirozené číslo

funkce n**–tá odmocnina** (3.05) je funkce h, která každému reálnému číslu x přiřazuje nejvýše jednu funkční hodnotu $h(x) = \sqrt[n]{x}$, kde n je kladné přirozené číslo

funkce –*n*–tá mocnina (3.04) – je funkce $h(x)$ definovaná předpisem:

pro všechna $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ je $h(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, kde n je kladné přirozené číslo

funkce –*n*-tá odmocnina (3.06) – je funkce $h(x)$, která je inverzní k funkci –n–tá mocnina, kde n je kladné přirozené číslo; nebo funkce –n-tá odmocnina je funkce $h(x)$, která je definována jako podíl konstantní funkce 1 a funkce n-tá odmocnina, kde n je kladné přirozené číslo

funkce neklesající – viz **neklesající funkce**

funkce nepřímá úměra (3.04.1) je funkce $f(x) = \frac{a}{x}$, kde reálné číslo $a \neq 0$

funkce nerostoucí – viz **nerostoucí funkce**

funkce obecná exponenciální – viz **obecná exponenciální funkce**

funkce periodická – viz **periodická funkce**

funkce přímá úměra (3.03) je lineární funkce $f(x)=a\cdot x$, kde reálné číslo $a\neq 0$

funkce polynom nejvýše n-tého stupně (3.03), kde n je přirozené číslo, je funkce f, která každému reálnému číslu x přiřazuje funkční hodnotu $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$, kde $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n$ jsou reálná čísla

funkce polynom právě n-tého stupně (3.03), kde n je přirozené číslo, je funkce f, která každému reálnému číslu x přiřazuje funkční hodnotu $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$, kde $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n$ jsou reálná čísla taková, že $a_n\neq 0$

funkce prostá – viz **prostá funkce**

funkce přirozený logaritmus (3.09)je funkce f taková, že každému kladnému reálnému číslu x přiřazuje funkční hodnotu $f(x)=\ln x$; pro kladná reálná čísla x platí $\ln x=\log_e x$, tj. jde o speciální případ funkce logaritmus o základu a

funkce racionální – viz **racionální funkce**

funkce rostoucí – viz **rostoucí funkce**

funkce ryze monotónní – viz **ryze monotónní funkce**

funkce složená – viz **složená funkce**

funkce sudá – viz **sudá funkce**

funkce vnější – viz **složená funkce**

funkce vnitřní – viz **složená funkce**

funkce základní exponenciální – viz **základní exponenciální funkce**

funkce záporná celá mocnina (3.04) – viz **funkce –*n*-tá mocnina**

funkce záporná celá odmocnina (3.06) – viz **funkce –*n*-tá odmocnina**

funkce zobrazující interval na interval (2.04) – *jestliže $f(x)$ je funkce, I a J jsou intervaly takové, že $I\subset D(f)$, potom **funkce** $f(x)$ **zobrazuje interval** I **na interval** J, jestliže ke každému $y\in J$ existuje $x\in I$ takové, že $y=f(x)$*

G

Gaussova rovina (4.02)

goniometrický tvar komplexního čísla – viz **vyjádření komplexního čísla v goniometrickém tvaru**

graf funkce (2.01) – *je-li* $f(x)$ *funkce jedné proměnné, potom* ***graf funkce*** $f(x)$ *je množina všech bodů* $[x, f(x)]$ *v rovině pro* $x \in D(f)$, *tj. jde o množinu* $\{[x, f(x)]\ ;\ x \in D(f)\}$

H

Ch

I

identická funkce (3.01) je funkce $g(x)$ definovaná předpisem: pro všechna $x \in (-\infty, \infty)$ je $g(x) = x$

if…**then**…**else**… (1.02.2.3.5)

imaginární část komplexního čísla (4.02)

imaginární číslo (4.02)

imaginární jednotka (4.02)

implikace (1.02.2.3.1)

implikace výroků (1.02.2.3.1)

interval – interval je množina reálných čísel

Jestliže a a b jsou reálná čísla taková, že $a < b$, potom

a) otevřeným intervalem s krajními body a a b rozumíme množinu $(a,\ b) = \{x;\ \ a < x < b\}$

b) uzavřeným intervalem s krajními body a a b rozumíme množinu $\langle a,\ b\rangle = \{x;\ \ a \le x \le b\}$

c) zleva otevřeným a zprava uzavřeným intervalem s krajními body a a b rozumíme množinu $(a,\ b\rangle = \{x;\ \ a < x \le b\}$

d) zleva uzavřeným a zprava otevřeným intervalem s krajními body a a b rozumíme množinu $\langle a,\ b) = \{x;\ \ a \le x < b\}$

inverze v permutaci (5.03.1) – *jestliže* $p = (p(1), p(2), p(3), \dots, p(n))$ *je permutace na množině* $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, *kde* $n \in N_0$, *potom* ***inverzí v permutaci*** p *rozumíme uspořádanou dvojici* $(p(i), p(j))$ *takovou, že* $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $i < j$ *a současně* $p(i) > p(j)$

inverzní funkce (2.04) – *jestliže* $f(x)$ *je funkce,* I *a* J *jsou intervaly takové, že* $I = D(f)$, *funkce* $f(x)$ *je prostá v intervalu* I *a zobrazuje interval* I *na interval* J, *potom* $f^{-1}(x)$ *je* ***inverzní funkce k funkci*** $f(x)$ (*v intervalu* I), *jestliže pro všechna* $x \in I$ *a pro všechna* $y \in J$ *platí:* $y = f(x)$ *právě tehdy, jestliže* $x = f^{-1}(y)$

iracionální funkce (3.06.1) jsou funkce, které vzniknou z funkcí konstantních, z funkce identické a z funkcí n–tá odmocnina, kde n je kladné přirozené číslo, užitím operací součet, rozdíl, součin, podíl a skládání funkcí

J

K

klesající funkce (2.02.1) – *jsou-li* $f(x)$ *funkce a* I *interval takové, že* $I \subset D(f)$, *potom*

funkce $f(x)$ *je* ***klesající v intervalu*** I, *jestliže pro libovolná* x_1 *a* x_2 *z intervalu* I *taková, že* $x_1 < x_2$, *platí* $f(x_1) > f(x_2)$

kombinace (bez opakování – 5.05) – *jestliže M je konečná množina a k je přirozené číslo takové, že* $|M| = n \in N_0$ *a* $0 \leq k \leq n$, *potom* ***kombinací*** *k*–***té třídy*** *n*–***prvkové množiny*** *M* (*bez opakování*) *rozumíme podmnožinu množiny M, která obsahuje právě k různých prvků množiny M*, tj. neuspořádanou *k*–tici prvků množiny *M*, ve které se každý prvek množiny *M* vyskytuje nejvýše jednou

kombinace s opakováním (5.05.1) – *Jestliže M je konečná množina taková, že* $|M| = n \in N_0$, *a k je přirozené číslo, potom* ***kombinací*** *k*–***té třídy*** *n*–***prvkové množiny*** *M* ***s opakováním*** *rozumíme množinu neuspořádaných k–tici prvků množiny M, ve které se každý prvek množiny M vyskytuje nejvýše k–krát*

kombinační číslo (5.05) – jsou-li n a k přirozená čísla taková, že $0 \leq k \leq n$, potom kombinačním číslem $\binom{n}{k}$ (které čteme *n* nad *k*) rozumíme $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

komplexně sdružené číslo ke komplexnímu číslu (4.03)

komplexní číslo (4.02)

komplexní funkce jedné reálné proměnné (4.09)

komplexní funkce reálné proměnné – viz **komplexní funkce jedné reálné proměnné**

komplexní jednotka (4.02)

konjunkce (1.02.2.3.1)

konjunkce výroků (1.02.2.3.1)

konkávní funkce (2.03) – *jsou-li* $f(x)$ *funkce a* I *interval takové, že* $I \subset D(f)$, *potom* ***funkce*** $f(x)$ *je* ***konkávní v intervalu*** I, *jestliže pro libovolná* x_1 *a* x_2 *z intervalu* I *taková, že* $x_1 < x_2$, *platí: jestliže body* $[x_1, f(x_1)]$ *a* $[x_2, f(x_2)]$ *spojíme úsečkou, potom pro libovolné reálné číslo* $x \in (x_1, x_2)$ *leží bod* $[x, f(x)]$ *nad touto úsečkou*

konstantní funkce (3.01) je funkce $f(x)$ definovaná předpisem: pro všechna $x \in (-\infty, \infty)$

je $f(x) = k$, kde k je reálné číslo

kontradikce (výrokového počtu – 1.02.2.3.4)

konvexní funkce (2.03) – *jsou-li* $f(x)$ *funkce a* I *interval takové, že* $I \subset D(f)$, *potom* ***funkce*** $f(x)$ *je* ***konvexní v intervalu*** I, *jestliže pro libovolná* x_1 *a* x_2 *z intervalu* I *taková, že* $x_1 < x_2$, *platí: jestliže body* $[x_1, f(x_1)]$ *a* $[x_2, f(x_2)]$ *spojíme úsečkou, potom pro libovolné reálné číslo* $x \in (x_1, x_2)$ *leží bod* $[x, f(x)]$ *pod touto úsečkou*

kubická funkce (3.03) je každý polynom právě třetího stupně

kvadratická funkce (3.03 a 3.03.2) je každý polynom právě druhého stupně

kvadratická nerovnice (3.03.2)

kvadratická rovnice (3.03.2, 4.04 a 4.08)

L

lichá funkce (2.05.1) – *jestliže* $f(x)$ *je funkce, potom* ***funkce*** $f(x)$ *je* ***lichá****, jestliže pro všechna reálná čísla* x *platí:*

a) *jestliže* $x \in D(f)$, *potom* $-x \in D(f)$

b) *jestliže* $x \in D(f)$, *potom* $f(-x) = -f(x)$

lichá permutace (5.03.1) – *jestliže* $p = (p(1), p(2), p(3), \dots, p(n))$ *je permutace na množině* $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, *kde* $n \in N_0$, *potom* ***permutace*** p *je* ***lichá****, jestliže počet všech různých inverzí v permutaci* p *je lichý*

lineární funkce (3.03.1) je každý polynom právě prvního stupně

logaritmické funkce dělíme na funkci přirozený logaritmus a funkce logaritmy o základu a, kde $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$

logaritmus o základu a – viz **funkce logaritmus o základu** a

logika (1.02.2)

M

matematická logika (1.02.2.2)

matematika (1.01, 1.01.1, 1.01.2)

metamatematika – viz **matematická logika**

množina (1.02.1)*je souhrn objektů určitých vlastností, které chápeme jako celek*

množina všech komplexních čísel (4.02)

Moivreova věta (4.05) – pro libovolné nenulové komplexní číslo $z = |z| \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha)$ a libovolné přirozené číslo n platí: $z^n = |z|^n \cdot (\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))$

monotónní funkce (2.02.2) – *jsou-li* $f(x)$ *funkce a* I *interval takové, že* $I \subset D(f)$, *potom* ***funkce*** $f(x)$ *je* ***monotónní v intervalu*** I, *jestliže buď* $f(x)$ *je neklesající v intervalu* I, *nebo* $f(x)$ *je nerostoucí v intervalu* I

N

N označuje množinu všech kladných přirozených čísel

N_0 označuje množinu všech přirozených čísel, tj. $N_0 = N \cup \{0\}$

NAND (1.02.2.3.5)

negace (1.02.2.3.1)

negace výroku (1.02.2.3.1)

neklesající funkce (2.02.2) – *jsou-li* $f(x)$ *funkce a* I *interval takové, že* $I \subset D(f)$, *potom*

funkce $f(x)$ *je* ***neklesající v intervalu*** I, *jestliže pro libovolná* x_1 *a* x_2 *z intervalu* I *taková, že* $x_1 < x_2$, *platí* $f(x_1) \leq f(x_2)$

nerostoucí funkce (2.02.2) – *jsou-li* $f(x)$ *funkce a* I *interval takové, že* $I \subset D(f)$, *potom*

funkce $f(x)$ *je* ***nerostoucí v intervalu*** I *, jestliže pro libovolná* x_1 *a* x_2 *z intervalu* I *taková, že* $x_1 < x_2$*, platí* $f(x_1) \geq f(x_2)$

neuspořádaná dvojice prvků (1.02.1) – *množina* $\{a,b\}$ *je* ***neuspořádanou dvojicí prvků*** *a* ***a*** *b*

Nicodův operátor – viz **NOR**

nondisjunkce – viz **NOR**

nonekvivalence – viz **XOR**

nonkonjunkce – viz **NAND**

NOR (1.02.2.3.5)

nulový bod funkce (2.06.1) – *jestliže* $f(x)$ *je funkce, potom* ***nulovým bodem funkce*** $f(x)$ (*nebo* ***průsečíkem grafu funkce*** $f(x)$ ***s osou*** x) *rozumíme bod* $[a,\ 0]$ *takový, že* $f(a) = 0$.

O

obecná exponenciální funkce (3.08) je funkce $f(x)$, která každému reálnému číslu x přiřazuje funkční hodnotu $f(x) = a^x$, kde a je kladné reálné číslo

obor hodnot funkce (2.01) $f(x)$ *je množina* $\{f(x)\ ;\ x \in D(f)\}$, *kterou značíme* $H(f)$, tj. $H(f) = \{f(x)\ ;\ x \in D(f)\}$

obor hodnot zobrazení – *jestliže f je zobrazení množiny* A *do množiny* B*, potom* ***oborem hodnot zobrazení*** f *, který značíme* $H(f)$*, rozumíme množinu* $H(f) = \{y;\ [x,\ y] \in f\}$

odvozovací pravidlo – viz **dedukční pravidlo**

P

perioda– viz **periodická funkce**

periodická funkce (2.05.2) – *jestliže* $f(x)$ *je funkce, potom* ***funkce*** $f(x)$ *je* ***periodická****, jestliže existuje kladné reálné číslo* p *(které nazýváme* periodou*) takové, že* pro *všechna reálná čísla* x *a pro všechna celá čísla* k *platí*:

a) *jestliže* $x \in D(f)$*, potom* $x + k \cdot p \in D(f)$

b) *jestliže* $x \in D(f)$*, potom* $f(x + k \cdot p) = f(x)$

Nejmenší takové kladné reálné číslo p *se nazývá* ***primitivní periodou***

permutace (bez opakování – 5.03) – *jestliže M je konečná množina taková, že* $|M| = n \in N_0$, *potom permutací n–prvkové množiny M (bez opakování) rozumíme uspořádanou n–tici prvků množiny M, ve které se každý prvek množiny M vyskytuje právě jednou.*

permutace jako zobrazení (5.03.1) – *jestliže* $M = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, *kde* $n \in N_0$, *potom* ***permutací na množině*** *M rozumíme prosté zobrazení množiny M na množinu M*

permutace lichá – viz **lichá permutace**

permutace s opakováním (5.03.2) – *jestliže* $M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ *je konečná množina taková, že* $|M| = n \in N_0$, $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ *jsou kladná přirozená čísla,* potom ***permutací*** $(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)$*–**té třídy** n–**prvkové množiny** M **s opakováním** rozumíme uspořádanou* $(k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n)$*–tici prvků množiny M, ve které se prvek* a_1 *množiny M vyskytuje právě* k_1*–krát, prvek* a_2 *množiny M vyskytuje právě* k_2*–krát, prvek* a_3 *množiny M vyskytuje právě* k_3*–krát, …, prvek* a_n *množiny M vyskytuje právě* k_n*–krát.*

permutace sudá – viz **sudá permutace**

Peirceova šipka – viz **NOR**

počet kombinací (5.05) – jestliže *M* je konečná množina a *k* je přirozené číslo takové, že

$|M| = n \in N_0$ *a* $0 \le k \le n$, potom počet všech kombinací *k*–té třídy *n*–prvkové množiny *M* (bez opakování) je $C_k(n) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

počet kombinací s opakováním (5.05.1) – Jestliže *M* je konečná množina taková, že $|M| = n \in N_0$, a *k* je přirozené číslo, potom počet všech kombinací *k*–té třídy *n*–prvkové množiny *M* s opakováním, který označíme $C'_k(n)$, je $C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$

počet permutací (5.03) – jestliže *M* je konečná množina taková, že $|M| = n \in N_0$, potom počet všech permutací *n*–prvkové množiny *M* (bez opakování), který se označuje *P*(*n*), je

$$P(n) = \begin{cases} 1 = 0!, \text{ jestliže } n = 0, \\ n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 = n!, \text{ jestliže } n > 0. \end{cases}$$

počet permutací s opakováním (5.03.2) – jestliže $M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ je konečná množina taková, že $|M| = n \in N_0$ a $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ jsou kladná přirozená čísla, potom počet všech permutací $(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)$–té třídy *n*–prvkové množiny *M* s opakováním, který se označuje $P'(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)$, je $P'(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n) = \frac{(k_1+k_2+k_3+\dots+k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \ldots \cdot k_n!}$

počet variací (5.04) – jestliže M je konečná množina a k přirozené číslo takové, že $|M| = n \in N_0$ a $0 \leq k \leq n$, potom počet všech variací k–té třídy n–prvkové množiny M (bez opakování), který se označuje $V_k(n)$, je $V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$

počet variací s opakováním (5.04.1) – Jestliže M je konečná množina taková, že $|M| = n \in N_0$, a k přirozené číslo, potom počet všech variací k–té třídy n–prvkové množiny M s opakováním, který se označuje $V'_k(n)$, je $V'_k(n) = n^k$

podíl funkcí (2.07.2) – *jsou-li $f(x)$ a $g(x)$ funkce jedné proměnné,*

potom ***podílem funkcí*** *$f(x)$ a $g(x)$ rozumíme funkci $\frac{f}{g}$ takovou, že*

a) $D\left(\frac{f}{g}\right) = D(f) \cap \left(D(g) - \{x\ ;\ g(x) = 0\}\right)$,

b) *pro všechna* $x \in D\left(\frac{f}{g}\right)$ *je* $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

polární tvar komplexního čísla – viz **vyjádření komplexního čísla v Eulerově tvaru**

polynom – viz funkce polynom nejvýše n–tého stupně a funkce polynom právě n–tého stupně

polynom nejvýše n–tého stupně (3.03) – viz funkce polynom nejvýše n–tého stupně

polynom právě n–tého stupně (3.03) – viz funkce polynom právě n–tého stupně

prázdná množina (1.02.1)

primitivní perioda – viz **periodická funkce**

prostá funkce (2.02.1) – *jsou-li $f(x)$ funkce a I interval takové, že $I \subset D(f)$, potom*

funkce *$f(x)$ je* ***prostá*** *v intervalu I, jestliže pro libovolná x_1 a x_2 z intervalu I taková, že $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$*

prosté zobrazení – *jestliže f je zobrazení množiny A do množiny B, potom f je* ***prosté zobrazení množiny*** *A* ***do množiny*** *B, jestliže pro libovolná x_1 a x_2 z $D(f)$ taková, že $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$*

průsečík grafu funkce s osou x – viz **nulový bod funkce**

průsečík grafu funkce s osou y (2.06.1) – *jestliže $f(x)$ je funkce, potom*

průsečíkem grafu funkce $f(x)$ **s osou** y *rozumíme bod* $[0, f(0)]$

průsečík grafů funkcí (2.06.2) – *jestliže* $f(x)$ *a* $g(x)$ *jsou funkce, potom*

průsečíkem grafů funkcí $f(x)$ *a* $g(x)$ *rozumíme bod* $[a, b]$ *takový, že* $f(a) = g(a) = b$

přirozený logaritmus – viz **funkce přirozený logaritmus**

Q

Q označuje množinu všech racionálních čísel

R

R označuje množinu všech reálných čísel

racionální funkce (3.04.2) je podíl dvou polynomů

reálná část komplexního čísla (4.02)

reálný násobek funkce (2.07.2) – *jsou-li* $f(x)$ *funkce jedné proměnné a* k *reálné číslo,*

potom ***reálným*** k ***– násobkem funkce*** $f(x)$ *rozumíme funkci* $k \cdot f$ *takovou, že*

a) $D(k \cdot f) = D(f)$,

b) *pro všechna* $x \in D(k \cdot f)$ *je* $(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$

reálný podíl funkce (2.07.2) – *jsou-li* $f(x)$ *funkce jedné proměnné a* k *nenulové reálné číslo,*

potom ***reálným*** k ***– podílem funkce*** $f(x)$ *rozumíme funkci* $\dfrac{f}{k}$ *takovou, že*

a) $D\left(\dfrac{f}{k}\right) = D(f)$,

b) *pro všechna* $x \in D\left(\dfrac{f}{k}\right)$ *je* $\left(\dfrac{f}{k}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{k}$

rostoucí funkce (2.02.1) – *jsou-li* $f(x)$ *funkce a* I *interval takové, že* $I \subset D(f)$, *potom*

funkce $f(x)$ *je* ***rostoucí v intervalu*** I, *jestliže pro libovolná* x_1 *a* x_2 *z intervalu* I *taková, že* $x_1 < x_2$, *platí* $f(x_1) < f(x_2)$

rozdíl funkcí (2.07.1) – *jsou-li* $f(x)$ *a* $g(x)$ *funkce jedné proměnné* *potom* ***rozdílem funkcí*** $f(x)$ *a* $g(x)$ *rozumíme funkci* $f-g$ *takovou, že*

a) $D(f-g)=D(f)\cap D(g)$

b) *pro všechna* $x\in D(f-g)$ *je* $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

ryze imaginární číslo (4.02)

ryze monotónní funkce (2.02.1) – *jsou-li* $f(x)$ *funkce a* I *interval takové, že* $I\subset D(f)$*, potom* ***funkce*** $f(x)$ *je* ***ryze monotónní v intervalu*** I*, jestliže buď* $f(x)$ *je rostoucí v intervalu* I*, nebo* $f(x)$ *je klesající v intervalu* I

Ř

S

Shefferův operátor – viz **NAND**

složená funkce (2.07.3) – *jsou-li* $f(y)$ *a* $g(x)$ *funkce jedné proměnné,*

potom ***složenou funkcí vnější funkce*** $f(y)$ ***a vnitřní funkce*** $g(x)$ *rozumíme funkci* $f[g]$ *takovou, že*

a) $D(f[g])=D(g)\cap\{x\,;\,g(x)\in D(f)\}$,

b) *pro všechna* $x\in D(f[g])$ *je* $(f[g])(x)=f(g(x))$

součet funkcí (2.07.1) – *jsou-li* $f(x)$ *a* $g(x)$ *funkce jedné proměnné,*

potom ***součtem funkcí*** $f(x)$ *a* $g(x)$ *rozumíme funkci* $f+g$ *takovou, že*

a) $D(f+g)=D(f)\cap D(g)$

b) *pro všechna* $x\in D(f+g)$ *je* $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

součin funkcí (2.07.2) – *jsou-li* $f(x)$ *a* $g(x)$ *funkce jedné proměnné,*

potom ***součinem funkcí*** $f(x)$ *a* $g(x)$ *rozumíme funkci* $f\cdot g$ *takovou, že*

a) $D(f\cdot g)=D(f)\cap D(g)$

b) *pro všechna* $x\in D(f\cdot g)$ *je* $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$

splnitelná formule (výrokového počtu – 1.02.2.3.4)

sudá funkce (2.05.1) – *jestliže* $f(x)$ *je funkce, potom* ***funkce*** $f(x)$ *je* ***sudá****, jestliže pro všechna reálná čísla* x *platí*:

a) *jestliže* $x \in D(f)$*, potom* $-x \in D(f)$

b) *jestliže* $x \in D(f)$*, potom* $f(-x) = f(x)$

sudá permutace (5.03.1) – *jestliže* $p = (p(1), p(2), p(3), \dots, p(n))$ *je permutace na množině* $\{1, 2, 3, \dots, n\}$*, kde* $n \in N_0$*, potom* ***permutace*** p *je* ***sudá****, jestliže počet všech různých inverzí v permutaci* p *je sudý*

symbolická logika – viz **matematická logika**

Š

šifra XOR (1.02.2.3.5)

T

tautologický důsledek (1.02.2.3.6)

tautologický konsekvent – viz **tautologický důsledek**

tautologie (výrokového počtu – 1.02.2.3.3)

U

V

variace (bez opakování – 5.04) – *jestliže M je konečná množina a k je přirozené číslo takové, že* $|M| = n \in N_0$ *a* $0 \leq k \leq n$*, potom* ***variací*** *k****–té třídy*** *n****–prvkové množiny*** *M* (*bez opakování*) *rozumíme uspořádanou k–tici prvků množiny M, ve které se každý prvek množiny M vyskytuje nejvýše jednou*

variace s opakováním (5.04.1) – *jestliže M je konečná množina a k je přirozené číslo takové, že* $|M| = n \in N_0$*, potom* ***variací*** *k****–té třídy*** *n****–prvkové množiny*** *M* ***s opakováním*** *rozumíme uspořádanou k–tici prvků množiny M, ve které se každý prvek množiny M vyskytuje nejvýše k–krát*

věta Moivreova – viz **Moivreova věta**

věta o řešení binomické rovnice (4.07) – jestliže $x^n = u$, kde n je kladné přirozené číslo a u je komplexní číslo, je binomická rovnice n–tého řádu

a) jestliže $u = 0$, potom rovnice $x^n = u$ má v množině všech komplexních čísel C jeden n–násobný kořen $x = 0$

b) jestliže $u \neq 0$ a $u = |u|$ $(\cos\,\alpha + i\,\sin\,\alpha)$, potom rovnice $x^{n} = u$ má v množině všech komplexních čísel C právě n různých řešení $x_{k+1} = \sqrt[n]{|u| \cdot \left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)}$

pro $k = 0, 1, \ldots, n-1$

věta o vlastnostech inverzní funkce (2.04) – jestliže $f(x)$ je funkce, I a J jsou intervaly takové, že $I = D(f)$, funkce $f(x)$ je prostá v intervalu I a zobrazuje interval I na interval J

a) potom funkce $f^{-1}(x)$ je prostá v intervalu J a zobrazuje interval J na interval I

b) potom $D(f) = H\left(f^{-1}\right)$ a $H(f) = D\left(f^{-1}\right)$

c) potom pro všechna $x \in I$ je $f^{-1}(f(x)) = x$

d) potom pro všechna $x \in J$ je $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$

e) jestliže $f(x)$ je rostoucí v intervalu I, potom $f^{-1}(x)$ je rostoucí v intervalu J

f) jestliže $f(x)$ je klesající v intervalu I, potom $f^{-1}(x)$ je klesající v intervalu J

g) potom grafy funkcí $f(x)$ a $f^{-1}(x)$ jsou souměrné podle osy 1. a 3. kvadrantu

h) potom pro všechna $x \in I$ je $\left(f^{-1}\right)^{-1}(x) = f(x)$ (tzn. $f(x)$ a $f^{-1}(x)$ je dvojice navzájem inverzních funkcí)

věta o vlastnostech konstantní funkce (3.01) – jestliže $f(x)$ je funkce taková, že $D(f) = (-\infty,\ \infty)$, potom

a) $f(x)$ je současně nerostoucí i neklesající v intervalu $(-\infty,\ \infty)$ právě tehdy, jestliže $f(x)$ je konstantní funkce

b) $f(x)$ je současně sudá i lichá právě tehdy, jestliže $f(x)$ je konstantní funkce definovaná předpisem: pro všechna $x \in (-\infty,\ \infty)$ je $f(x) = 0$

věta o vlastnostech sudé a liché funkce (2.05.1) –

a) součet dvou sudých funkcí je sudá funkce

b) rozdíl dvou sudých funkcí je sudá funkce

c) součet dvou lichých funkcí je lichá funkce

d) rozdíl dvou lichých funkcí je lichá funkce

e) konstantní násobek sudé funkce je taktéž sudá funkce

f) konstantní násobek liché funkce je taktéž lichá funkce

g) součin dvou sudých funkcí je sudá funkce

h) součin dvou lichých funkcí je sudá funkce

i) součin liché funkce a sudé funkce je lichá funkce

vlastnosti identické funkce (3.01) – identická funkce

a) je rostoucí v intervalu $(-\infty,\ \infty)$, tudíž je i neklesající v intervalu $(-\infty,\ \infty)$

b) není ani konvexní, ani konkávní v žádném intervalu

c) je lichá

d) není sudá

e) není periodická

vlastnosti konstantní funkce (3.01) – konstantní funkce

a) není ani rostoucí, ani klesající v žádném intervalu

b) je současně nerostoucí i neklesající v intervalu $(-\infty,\ \infty)$

c) není ani konvexní, ani konkávní v žádném intervalu

d) je sudá

e) je periodická, přičemž každé kladné reálné číslo p je periodou této funkce

(primitivní perioda neexistuje)

vnější funkce – viz **složená funkce**

vnitřní funkce – viz **složená funkce**

vyjádření komplexního čísla v algebraickém tvaru (4.02)

vyjádření komplexního čísla v Eulerově tvaru (4.09)

vyjádření komplexního čísla v goniometrickém tvaru (4.04)

vyjádření komplexního čísla v polárním tvaru –viz **vyjádření komplexního čísla v Eulerově tvaru**

vylučovací nebo – viz **XOR**

výrok (1.02.2.3)

výroková formule – viz **formule výrokového počtu**

výroková proměnná (1.02.3.3)

výrokový počet (1.02.2.3)

vzájemně jednoznačné zobrazení – *jestliže f je zobrazení množiny A do množiny B, potom f je **vzájemně jednoznačné zobrazení množiny** A **na množinu** B, jestliže f je prosté zobrazení množiny A do množiny B a je zobrazení množiny A na množinu B.*

W

X

XOR (1.02.2.3.5)

Y

Z

Z označuje množinu všech celých čísel

základní exponenciální funkce (3.08.1) je funkce f, která každému reálnému číslu x přiřazuje funkční hodnotu $f(x)=e^x$, kde

$e \approx 2{,}71828182845904523536028747135266249775 7\ldots$ je iracionální číslo a nazývá se Eulerovo číslo, základní exponenciální funkce je speciální případ obecné exponenciální funkce

znamení permutace (5.03.1) – *jestliže $p = \big(p(1),\ p(2),\ p(3),\ \ldots,\ p(n)\big)$ je permutace na množině $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, kde $n \in N_0$, potom **znamením permutace** p rozumíme*

$$\mathrm{sg}(p) = \mathrm{sg}\big(p(1),\ p(2),\ p(3),\ \ldots,\ p(n)\big) = \begin{cases} 1, \text{jestliže } p \text{ je sudá permutace,} \\ -1, \text{jestliže } p \text{ je lichá permutace.} \end{cases}$$

zobecněná Moivreova věta (4.05) – pro libovolné nenulové komplexní číslo $z = |z| \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha)$ a libovolné celé číslo n platí: $z^n = |z|^n \cdot (\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))$

zobrazení množiny do množiny – *jsou-li* A *a* B *množiny, potom* f *je* ***zobrazení množiny*** A ***do množiny*** B*, jestliže* $f \subset A \times B$ *a ke každému* $x \in A$ *existuje právě jedno* $y \in B$ *takové, že* $[x, y] \in f$

zobrazení množiny na množinu – *jestliže f je zobrazení množiny* A *do množiny* B*, potom* f *je* ***zobrazení množiny*** A ***na množinu*** B*, jestliže* $H(f) = B$

zobrazení prosté – viz **prosté zobrazení**

zobrazení vzájemně jednoznačné – viz **vzájemně jednoznačné zobrazení**

zobrazení z množiny do množiny – *jsou-li* A *a* B *množiny, potom* f *je* ***zobrazení z množiny*** A ***do množiny*** B*, jestliže* $f \subset A \times B$ *a ke každému* $x \in A$ *existuje nejvýše jedno* $y \in B$ *takové, že* $[x, y] \in f$

7 Matematika vs. přírodní a technické vědy

Je zajímavé sledovat myšlenkový vývoj lidstva a jeho měnící se názory na různé zajímavé problémy. Posláním vědy je hledat ta nejjednodušší vysvětlení složitých skutečností. Snadno podléháme omylu, že skutečnosti jsou jednoduché, protože jednoduchost je to, co hledáme. Vlastně hledáme jednoduchost, ale nedůvěřujeme jí. Někteří hovoří o tom, že matematika a logika jsou jako past na myši. Lze to vyjádřit i jinak. Matematika je oceán a toho, kdo se na něj jednou odváží, buď postihne mořská nemoc a s hrůzou pomyslí na jeho hloubku a šíři, nebo jednou provždy se zasnoubí s jeho nekonečnými vodami. Byli jsme vedeni k představě věcí nekonečně zázračnějších než představy básníků a snílků minulosti. Ukazuje to, že imaginace přírody je mnohem, mnohem větší než imaginace člověka. Například o kolik pozoruhodnější je pro nás to, že jsme připoutáni vlivem záhadné přitažlivosti k otáčející se kouli – polovina z nás vzhůru nohama – která si miliardy let pluje prostorem, než představa, že jsme neseni na hřbetu slona nadnášeného želvou plovoucí v bezedném moři. Právě proto je matematika velkým dobrodružstvím myšlení. Slovo matematika je odvozeno z řeckých slov *μαθηματικός* (čti mathématikós), které znamená milující poznání, a *μάθημα* (čti máthéma), které vyjadřuje vědu, příp. vědění, příp. poznání, je věda zabývající se z formálního hlediska kvantitou, strukturou, prostorem a změnou. Mezi jinými vědami se vyznačuje nejvyšší mírou abstrakce a přesnosti. Díky těmto vlastnostem je matematika často označována za *královnu věd*. V její historii se zrcadlí mnohé z nejhlubších myšlenek bezpočtu generací lidstva. Matematika byla ovlivněna zemědělstvím, obchodem i výrobou zboží, technikou a filosofií, podobně jako fyzikou a astronomií. Vliv hydrodynamiky na teorii funkcí, Kantova učení a zeměměřičství na geometrii, elektromagnetismu na teorii diferenciálních rovnic, karteziánství na mechaniku a scholastiky na infinitezimální počet (jde o společné označení pro diferenciální a integrální počet) je nejen nepopiratelný, ale i určující. Kdo chce proniknout do matematiky hlouběji, musí putovat za velkými mistry a z jejich spisů poznat postup při bádání v matematice. Kdo se chce dostat až sem, potřebuje, aby měl určitý přehled, který získá v učebnicích a příručkách.

Faktografie může být sice zajímavá při popisu geologických vrstev ve středních Čechách či toku Orlice nebo takových rostlinných druhů, jež trvají nebo poklidně tečou, ale nepoví nic o tématu tak proměnlivém a neklidném, jako je matematika. Soupis dat nestačí a mezi mnoha řekami se může náhle vyskytnout jedna, která (třeba nepoměrně kratší) vykoná více svými vlivy, o něž tu především jde. A proto je nutné vracet se k pramenům, zkoumat složení vody a její specifické vlastnosti, proto je nutné odvážit se pod hladinu, která jako všechny hladiny obráží skutečnost, ale která – a proto je nutné sestoupit do hlubiny – obráží tuto skutečnost jinak, zajímavěji a barevněji a především tak, že tento odraz je daleko věrnější. Samozřejmě každá metafora je pomůckou, každé přirovnání má své meze a jednu nohu kratší. Abychom se vrátili k obrazu řeky, budeme hledat proudy rychlé a čisté vody, které podemílají oči modrookým holkám a které jsou plné obrazů. Budeme se vyhýbat těm částem toku, které poznaly zdánlivé dobrodiní regulace, protože regulace je nuda. Raději nás budou zajímat ty části toku, které rozkolísávají krajiny, lidi i hvězdnou oblohu.

Historie matematiky sahá až do pravěku, náznaky teoretického myšlení v Egyptě a Mezopotámii v matematice nastupují teprve v antickém Řecku, kdy prodělala velký rozvoj a výrazné úspěchy dosáhla zejména geometrie. V předmluvě ke svému dílu o architektuře vypráví Vitruvius tuto příznačnou anekdotu: *Aristippus philosophus Socraticus, naufragio cum eiectus ad Rhodiensium litus animadvertisset geometrica schemata descripta, exclamavisse ad comites ita dicitur: Bene speremus, hominum enim vestigia video.* Přeložme toto místo volně do češtiny, abychom patřičně vytkli jeho symbolický obsah: *Aristippus, Sókratův žák (nebo stoupenec), byl při ztroskotání lodi vyvržen na břeh ostrova Rhodos. Tam zpozoroval v písku nakreslené geometrické obrazce, a proto zvolal radostně ke svým druhům: „Buďme dobré naděje, protože vidím stopy lidí.“*

Co tedy musí znát technik či přírodovědec na vysoké profesionální úrovni, aby mohl obstát před skutečně obtížnými problémy? Matematiku? Určitě mnoho věcí z tohoto oboru. Mnohdy směřovala výuka pouze k umění ovládat mechanické znalosti, aniž došlo k jakémukoli pochopení matematiky. Abychom viděli toto nebezpečí plastičtěji, představme si, že se seznamujeme s chemií tak, že se nejprve seznámíme s Bunsenovým hořákem, pak postupně v laboratoři objevíme řadu zajímavých přístrojů a začneme dělat pokusy. Zvládnout aparatury moderní chemie v laboratoři vyžaduje zručnost i otevřenou hlavu, prováděné pokusy jsou poutavé a často i vzrušující. Tak se vždy těšíme do laboratoře a odcházíme z ní někdy očouzeni, vždy však spokojeni. Z toho, co víme o chemii, je nám jasné, že naše seznamování s chemií se minulo cílem, protože celá laboratoř a pokusy v ní jsou jenom nástroj ke zkoumání vlastností, složení, vnitřní stavby a přeměny látek. Tzn. cílem toho všeho je dojít k chemickým rovnicím, vzorcům atd. a k umění jich využívat. Jinak bychom měli k chemii vztah ztělesněný nezapomenutelným strýcem Františkem z Jirotkova Saturnina:

„Byl to podivuhodný človíček. Vystřídal překvapující množství povolání z toho důvodu, že považoval za nedůstojné, aby někoho poslouchal. Teta tomu říkala vrozená hrdost…

Názor tety, že strýc byl vědeckým pracovníkem, také není možné vyvrátit. V určitém smyslu slova byl člověkem, který objevil celou řadu chemických pouček a pravidel nejrůznějšího druhu. Všechna tato pravidla už před ním objevili jiní, ale strýc o tom nic nevěděl, a nelze proto jeho zásluhy přehlížet.

Protože chemii vůbec nerozuměl, byly cesty jeho objevů posety trny a zkropeny potem, ale tím větší byla jeho radost ze získání zkušeností. Nebylo mu lze upřít sportovního ducha. Podobal se člověku, který po zvládnutí malé násobilky prohlásil svým učitelům: „Dál už mi nic neříkejte. Nechci nic slyšet o tom, že pan Pythagoras, Eudoxus, Euklides, Archimédes a tak dále, vymyslili to a to. Nepotřebuji týt z toho, co objevili jiní. Dejte mi papír, tužku a kružítko a nechte mne na pokoji. Však já na to přijdu sám.“

A strýček opravdu na leccos přišel. Tak například zjistil při pokusu, který měl vzrušující průběh, že lít vodu do kyseliny je blbost, a vůbec mu nevadilo, že tento poznatek, korektněji vyjádřený, mohl získat z učebnice chemie pro nižší třídy škol středních, aniž by si přitom popálil prsty a zánovní vestu.

Chemie mu byla panenskou pevninou, roztočeným větrným zámkem plným dveří, které se otvíraly tajemnými formulemi. Neznal názvosloví, ignoroval valenční koncovky a žasl, když mu ve zkumavkách a křivulích šuměly prudké chemické reakce.

Podoben středověkému alchymistovi pachtil se za přeludem, padal a zase se zvedal, jenže na konci jeho cesty nezářil kámen mudrců, nýbrž …"

Chemických strýců Františků není mnoho, neboť není tak jednoduché opatřit si chemickou laboratoř. Matematickým a logickým strýcem Františkem se člověk stane snadněji, protože je čím dál tím jednodušší opatřit si vlastní tužku a papír nebo zkoumat různé matematické softwarové produkty, a tak předvádět své umění v neumění.

Zvíře nemůže promyšleně obměňovat svou činnost. Nevnímá minulost jako zdroj informace pro budoucnost, žije v přítomnosti, žije právě teď. Jeho instinktivní chování je geneticky naplánováno. Člověk žije v čase. S minulostí ho spojují vzpomínky, k budoucnosti zaměřuje své plány a touhy. Člověk má komplexní paměť, schopnost uchovat a cíleně analyzovat ve svém vědomí to, co prožil. Dokáže proměnit včerejší zážitky z lovu ve zkušenosti, které zdokonalí lov zítřejší. To je základní mechanismus vývoje lidstva, jehož podstata se nezměnila ani po tisíciletích. Paměť má také i svou negativní stránku. Uchovává nejen poučení, ale také bolest a utrpení. Z nich vytváří děsivé představy a strach, kterými se blokuje a demobilizuje činnost. Vydává člověka do rukou osudu jako žábu, která je hypnotizována hadem.

Autor jedné z nejoriginálnějších filosofických koncepcí 20. století Alfred North Whitehead napsal: „*První člověk, který si všiml analogie mezi skupinou sedmi ryb a skupinou sedmi dní, udělal pozoruhodný krok v dějinách myšlení. Byl prvním člověkem, který uvažoval o pojmu patřícím do čisté matematiky*." Rovněž nikdy nikdo nenakreslil kružnici či bod. Všechny geometrické pojmy jsou idealizovány, jsou absolutně dokonalé, proto nereálné. Matematika by bez abstrakce, idealizace a fantazie nikdy neexistovala. Domnívat se, že fantazii potřebuje pouze umělec, je hluboký omyl.

Patří k vlastnostem člověka, že vše podrobuje úvahám a vynakládá trvalé úsilí, aby všemu přišel na kloub. Bylo tomu tak zřejmě odjakživa. Není předmětu, který by ušel lidské pozornosti a zvídavosti. K určitým otázkám se však ještě připojuje citový přízvuk, a to hlavně k těm, jež se jakýmkoli způsobem vztahují k lidské cestě hlubinami věků. Pro ty, kteří neznají matematiku, je složité dostat se k takovým pocitům jako je krása, nejhlubší krása přírody... Pokud se chcete něco dozvědět o přírodě, oceňovat přírodu, je nutné rozumět jazyku, kterým mluví.

První zřetelné a jasné přirovnání matematiky k jazyku vědy vyslovil, jak se zdá, Galileo Galilei: „*Filosofie světa je obsažena v grandiózní knize stále otevřené všem a každému – myslím tím knihu přírody. Porozumět jí však může jen ten, kdo se naučí jejímu jazyku a písmu, jímž je napsána. Napsána je jazykem matematiky a jejím písmem jsou matematické vzorce*." Smysl tohoto Galileiho přirovnání je samozřejmě hlubší. Bez matematiky by mnohé technické i naučné objevy nebyly možné. Galileův básnický příměr platí svým způsobem stále (i přes odstup čtyř století). Jeden z největších fyziků 20. stol. Werner Heisenberg charakterizoval postavení matematiky v současné fyzice velmi podobně: „*Původním, prvotním jazykem, který* *vzniká v procesu vědeckého osvojování faktů, je obvykle pro fyziku jazyk matematiky, zvláště pak matematické schéma, které fyzikům dovoluje předvídat výsledky budoucích experimentů*."

Kepler mohl odvodit z pozorování, která udělal Tycho Brahe, své zákony o pohybu planet pouze z důvodu, že už 2000 let před ním vypracovali řečtí matematici teorii kuželoseček. Newton mohl vybudovat svou nebeskou mechaniku pouze tehdy, když už byly položeny základy diferenciálního a integrálního počtu.

Pro vyjádření a sdělení myšlenek si lidstvo vytvořilo geniální prostředek – živou řeč a její písemnou podobu. Řeč se však mění. Přizpůsobuje se podmínkám života, obohacuje svou slovní zásobu, vytváří nové prostředky pro vyjádření nejjemnějších odstínů myšlenek. Ale zároveň se ukazuje i jako nedostatečná. V různých oblastech lidské činnosti tak vznikají vlastní jazyky, účelně přizpůsobené přesnému, výstižnému a krátkému vyjádření myšlenek, specifických pro příslušný obor lidské činnosti. Při práci na zhotovení nového výrobku se už nespokojujeme se slovním popisem, ale pro zpřesnění rozměrů, tvaru a dalších detailů užíváme i výkresu – tedy informace sdělené jakýmsi jazykem konstrukčním. Takový jazyk nesmí připustit nejednotné čtení, musí názorně předat celý komplex informací nezbytných k úspěšnému vykonání práce. Zmíněná forma sdělení je samozřejmě nesrovnatelně vhodnější než obyčejný slovní popis, vždyť slovní vyjádření jen trochu složitější konstrukce by bylo natolik těžkopádné a neohrabané, že by ztratilo přehlednost i pro samotného autora. Grafické zadání přečte kterýkoli specialista, i když třeba nebude rozumět jazyku slovního komentáře. Vždyť nejen současná matematika, ale také vznik a vývoj moderních informačních technologií by nebyl myslitelný bez určité kultury myšlení. Tato kultura se vyvíjela a pěstovala dlouho před vznikem prvního počítače. Ve vědě je jasnost a přesnost formulací bytostně důležitá. Jazyk vědy nesmí obsahovat žádné nepřesnosti nebo dovolit dvojí výklad. Jinak by nemohla věda existovat jako systém poznatků, nemohla by být budována na jistotě přesných a jednoduchých tvrzení, předpokladů a úvah. Stejně tak je nutné předem rozmýšlet všechny možné závěry a neztratit ze zřetele ty, kterým se výzkum dosud nevěnoval. Vědecký výklad musí být krátký a věcný, naprosto konkrétní. Právě proto je nauka nucena si vypracovat vlastní jazyk, schopný maximálně respektovat tuto specifiku.

Co je to matematika? Úplný laik si pod slovem matematika představuje sloupce čísel, množství tabulek logaritmických, úrokovacích či pojišťovacích i souborů nejrůznějších statistických dat apod. Zkušenější pozorovatel má zase tendenci porovnávat matematiku a hromadu jejích vzorců a vzorečků s mlýnkem na kávu. Vhodíš do něj několik údajů, chvilku točíš klikou a dole vypadne žádaný výsledek… Tím vším matematika není. Vzorečky jsou prostředkem, nikoli cílem. Jsou ztělesněním hospodárnosti myšlení a slouží k tomu, abychom nemuseli vždy znovu a znovu opakovat všechny úvahy „od Adama". Ani žádná hra vzorců a vzorečků, ani žádný mlýnek na kávu nemůže nahradit tvůrčí činnost schopného lidského mozku. Smysl matematiky je v hledání a odvozování platných vět povolenými logickými úvahami z daných faktů, které samy o sobě jsou nedokazatelné. Axiomy, ze kterých vycházíme, bereme z každodenní zkušenosti, z empirických poznatků, nebo také často také jen z čistě fiktivních úvah… Cílem je vytvořit uzavřený systém navzájem si neodporujících vět. Poznamenejme, že matematické symboly nejen nenechávají prostor nepřesným vyjádřením nebo mlhavým výkladům, ale často dovolují i takové zjednodušení logických postupů a úvah, které vede mnohem rychleji a příměji k výsledku. Navíc spolehlivost matematických vět je především důsledkem metody, kterou se matematické věty dokazují.

Ukážeme to na jednoduchém a pro techniku významném příkladu – na jakékoli úloze, která formálně vede k řešení soustavy lineárních rovnic. Pomocí algebraické symboliky se taková soustava řeší velmi snadno, není třeba žádných speciálních úvah. Ty jsou jednou provždy pro všechny takové soustavy rovnic hotové. Aplikace standardních pravidel tak dovoluje bez jakýchkoli principiálních obtíží dovést řešení každé takové úlohy do konce. A teď si představme, že k řešení nebudeme mít k dispozici tento jazyk matematických symbolů. V takové situaci jsou např. ti, kdo umějí řešit algebraické úlohy pouze prostředky tzv. elementární matematiky. To samozřejmě vede ke značným a zcela zbytečným komplikacím. Každá řešená úloha se v takovém případě stává zvláštním problémem a je pro ni nutno vypracovat zvláštní systém rozhodování. I nejjednodušší výpočet si najednou vyžaduje značné intelektuální vypětí. Srovnáme-li potom, jak jednoduše umožňuje řešit složité aritmetické úkoly i ta nejprostší algebraická symbolika, vyvstane před námi přínos matematiky ve zcela novém světle – jako přínos konkrétní nauce, nejrůznějším technickým a přírodovědným oborům.

Lze říci, že pro matematiku je charakteristická její systematičnost, ale také je velmi důležitá jednoznačnost, hospodárnost i obsažnost jejího vyjadřování. Navíc spolehlivost matematických vět je především důsledkem metody, kterou se matematické věty dokazují.

Matematická symbolika umožňuje zjednodušit zápis informací, zpřehlednit jej a vhodně přizpůsobit dalšímu zpracování. V rozvoji takových formalizovaných zápisů se před nedávnem objevil nový směr – je spjat s výpočetní technikou a jejím využitím v nejrůznějších oblastech lidské činnosti. Se strojem je nutno „hovořit“, komunikovat, stroji je třeba předem určit způsoby rozhodování ve všech v úvahu přicházejících situacích tak, aby mohl provést v daných podmínkách nejsprávnější postup. Stroj obecné běžné řeči nerozumí, a to přes veškerý v poslední době dosažený pokrok. Je třeba s ním „rozmlouvat“ jazykem jemu srozumitelným – tj. jazykem přesným, jednoznačným, neobsahujícím žádnou nedostatečnou nebo nadbytečnou informaci. Dnes se užívá celé řady jazykových systémů, jejichž prostřednictvím stroje sdělované informace přijímají, jednoznačně a spolehlivě s nimi pracují. Všechny jsou ve své podstatě založené na matematické a logické symbolice. To je také jedno z tajemství rychlosti počítačů, schopnosti snadno zvládnout i nejnáročnější numerické a logické operace. Za tisíciletí své existence prošla matematika velkou a složitou cestou, během níž se nejednou změnil její charakter, obsah a styl výkladu. Od jednoduchých záznamů na vrubovkách a z primitivního obratného počítání s kamínky na počitadle vyrostla matematika dnes v rozsáhlou vědní disciplínu s vlastním předmětem zkoumání a se specifickou metodikou.

Jednou ze slavných vět je Thaletova věta o velikosti úhlů trojúhelníků vytvořených nad průměrem kružnice. Je pojmenována po Thalétovi z Milétu, který ji jako první dokázal: *Všechny obvodové úhly sestrojené nad průměrem kružnice jsou pravé*.

Když archón Damasius ustanovil roku 582 v Athénách „Sedm mudrců“, byl prý Thalés první z nich. Platón vypráví, že Thalés chodil po dvoře a pozoroval hvězdy, až spadl do studny.

Děvečka, která ho vytáhla, mu prý vyhubovala: „*Jak chceš poznat všechno o vesmíru, když ani nevidíš, co máš pod nohama*?“ Dle Aristotela prý Thalés jednou odhadl, že bude velká úroda oliv, a najal si všechny lisy. Tak vydělal mnoho peněz a prokázal, že nebyl chudý z neschopnosti, ale protože o peníze nestál.

Jeho snaha o racionální výklad skutečnosti i obrat ke geometrii měly na celou západní filosofii zásadní vliv a někteří ho pokládají za „otce vědy“.

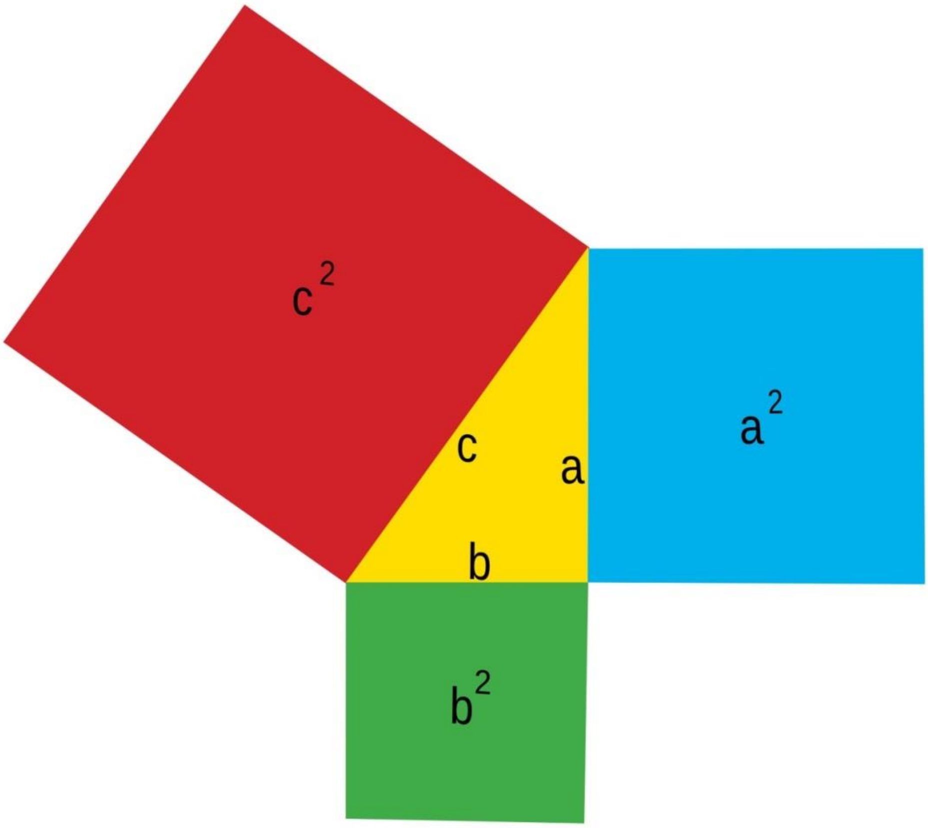
Mimořádný význam měla a má Pythagorova věta. Pythagoras ze Samu (také Pýthagorás, řec. Πυθαγόρας ο Σάμιος, okolo 570 př. n. l. ostrov Samos – po 510 př. n. l. Krotón v jižní Itálii) byl legendární řecký filosof, matematik, astronom i kněz. Byl také veřejně činný, ale údaje o něm se často rozcházejí. Z jeho díla (pokud nějaké napsal) se nic nezachovalo, založil však velmi významnou školu a výklady i legendy jeho následovníků překryly jeho původní myšlenky, takže se velmi obtížně rekonstruují. Pythagorejská tradice měla velký vliv na Platóna, byla živá v novoplatonismu, v renesanci a v různých – často fantastických – podobách žije i dnes.

Pythagoras, přezdívaný otec čísel, se narodil na ostrově Samos, jeho otcem byl snad kupec nebo rytec prstenů Mésarchos. Mezi jeho učiteli se uvádějí Ferdykés ze Syru a Anaximandros. V mládí cestoval po Egyptě a Babylonii, kde se seznámil s východními náboženskými myšlenkami. Když se roku 538 př. n. l. zmocnil vlády na Samu tyran Polykratés, Pythagoras uprchl a kolem roku 530 př. n. l. založil v dnešním Crotone v Kalabrii filosofickou školu. Žil se svými žáky podle přísných pravidel v pevném společenství a získal si i značný veřejný vliv. Podle některých pramenů měl za ženu Theano a s ní také děti. Když ve sporu s městem Sybaris krotónští roku 510 př. n. l. zvítězili, došlo ve městě ke sporům kvůli dělení dobyté půdy a hněv se obrátil proti Pythagorovi. Ten odešel z města a usadil se asi 160 km severněji v Metapontu u Tarenta, kde žil až do smrti. Po jeho smrti prý občané zřídili v jeho domě chrám bohyně Déméter.

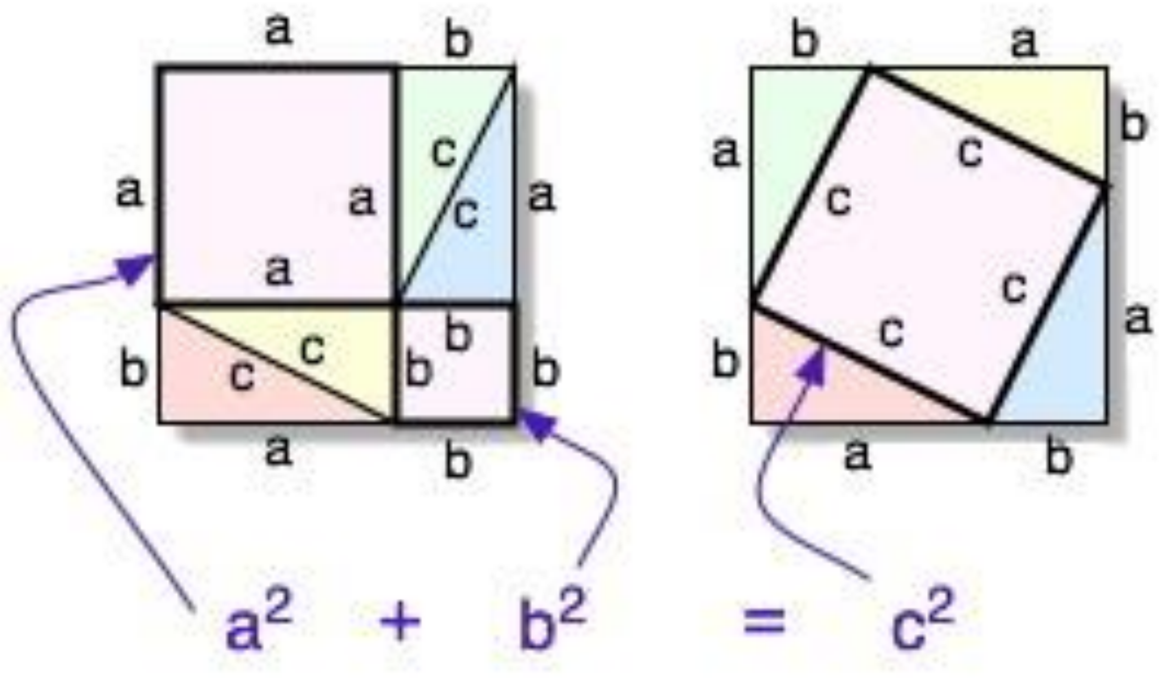
Pythagorovi se připisuje zavedení pojmu filosofie: když ho žáci nazývali sofos („mudrc“, „moudrý“), řekl jim, ať mu raději říkají „milovník moudrosti“ (filosofos z filein - „milovat“ a sofos - „moudrý“) a jeho následovníci si tedy začali říkat filosofové. Připisuje se mu také výraz kosmos (od kosmeó, zdobit), protože prý ve Vesmíru obdivoval jeho úžasný řád. Tomu odpovídá i výklad u Diogéna Laertia, podle něhož Pythagoras odvozoval počátek Vesmíru od („mužského“) Jednoho a („ženské“) "neohraničené dvojice"; podobně jako v čínském učení o Jin a Jang je základem protiklad lichých a sudých čísel. Z toho se pak buduje neviditelná stavba světa, poměry, čísla a geometrické tvary. Nejdokonalejší geometrické obrazce jsou koule a kruh, potom čtverec jakožto symbol čtyř živlů. Mezi pythagorejské pojmy patří také „čtveřina“ (tetraktys), totiž posloupnost čísel 1, 2, 3 a 4, jejichž součet je deset.

Pythagoras nebo jeho škola objevili vztah mezi délkou struny a tóny stupnice: poloviční struna zní o oktávu výš, dvoutřetinová o kvintu atd. Na tom je založena diatonická stupnice, pythagorejské ladění a konečně i představa harmonie sfér: průměry planetárních sfér (koulí) jsou vůči sobě v tomto poměru a při svém pohybu vydávají pro člověka neslyšitelný harmonický zvuk.

Mimořádný význam měla a má Pythagorova věta: součet čtverců nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníka je roven čtverci nad přeponou. Starší kultury věděly, že trojúhelník, jehož strany jsou v poměru 3:4:5 je pravoúhlý a Číňané to dovedli i geometricky dokázat. Obecný důkaz věty se tradičně připisoval Egypťanům či Babylóňanům, kde se s ním měl Pythagoras na svých cestách seznámit. Moderní badatelé tuto hypotézu zpochybňují hlavně tím, že pochybují o možnosti domluvy a jazykových znalostech obou stran. Řecká matematika v každém případě nalezla neobyčejně důmyslné obecné důkazy, jako je ten, který uvádí Eukleidés. Na obrázku je jiný, jednodušší geometrický důkaz



Pythagorova věta a …



... její důkaz

Vypracovala si vlastní jazyk, velmi přesný a ekonomický, neobyčejně efektivní nejen pro matematiku samu, ale i pro četné oblasti matematických aplikací. Uveďme ještě vyjádření ruského matematika Pafnutije Lvoviče Čebyševa: „*Matematika vznikla a rozvíjela se vlivem všeobecného základního úkolu veškeré lidské činnosti – používat existujících prostředků k dosažení největšího užitku*." Každý člověk obdrží klíč od nebeské brány. Tentýž klíč však také odemyká bránu pekel. V počátcích všech vědeckých pozorování jsme při hledání rozumného vysvětlení jevů vystačili s pouhou intuicí, založenou opravdu jen na prosté zkušenosti s všedními objekty. Ale jak se snažíme vypracovat lepší popis naší zkušenosti, která začíná zahrnovat stále širší rozsah jevů, přestávají být naše vysvětlení jednoduchá a stávají se tím, co nazýváme zákony. Často se zdá, že jsou čím dál nerozumnější a stále více vzdálené od toho, co považujeme za zřejmé.

Abychom lehce odlehčili povídání o vztahu matematiky a techniky, uvedeme příběh (pravděpodobně nepravdivý):

Na pustém ostrově se po ztroskotání lodi ocitnou matematik a technik. Na ostrově rostou dvě palmy: jedna z nich je velmi vysoká, druhá mnohem nižší. Úplně nahoře v koruně každé z nich roste jeden kokosový ořech.

Technik se rozhodne: dokud mají dostatek sil, pokusí se zdolat obtížnější úkol – dostat se ke kokosovému ořechu na vyšší palmě. Začne se škrábat nahoru a po chvíli se s nohama rozedřenýma do krve vrátí a vítězoslavně třímá ořech. Po rozbití skořápky kamenem trosečníci vypijí a snědí obsah ořechu.

O tři dny později, kdy jsou oba hlady a žízní již vysíleni, se matematik ujme úkolu získat druhý ořech. Vyšplhá na nižší palmu, utrhne ořech a snese jej dolu. Vzápětí však před zraky zkoprnělého technika začne šplhat na vyšší palmu (i s ořechem).

Za vydatného hekání a funění se celý zpocený konečně ocitne nahoře, uloží zde ořech a poté se s ještě většími obtížemi dostane dolů. Technik střídavě zírá na zcela vyčerpaného kolegu matematika a na ořech ve výšinách, nevěří svým očím:

„*Co tě to popadlo*?“

Matematik na něj upře bezelstný pohled:

„*Copak to není zřejmé? Zredukoval jsem úlohu na problém, jehož řešení již známe*!“

8 Závěr

Ke zvládnutí základů matematiky je vždy potřebné velké úsilí. Jak praví legenda:

O slavném řeckém matematiku Eukleidovi[6] se vypráví pověst, že věnoval své dílo panovníkovi, který ho pak obdaroval. Zároveň se ho ptal, zda není do tajů geometrie snazší cesta, než jsou jeho *Základy*. Eukleidés mu podle pověsti odpověděl: „*Ne, pane můj. Není královské cesty ke geometrii. Bez práce nejsou ani koláče, ani geometrie.*“

Na závěr by asi bylo vhodné odpovědět na otázku: Co si vybrat? Na to není třeba příliš se ptát. Vyberte si všechno, co je pro vás nové, o čem soudíte, že je krásné a že se vám může někdy k něčemu hodit, ať je to slovo nebo věta, ať je to myšlenka nebo vyprávění a vůbec všechno, co vidíte, že se třpytí jako drahokam. Někteří hovoří o tom, že matematika je jako past na myši. Lze to vyjádřit i jinak. Matematika je oceán a toho, kdo se na něj jednou odváží, buď postihne mořská nemoc, když s hrůzou pomyslí na jeho hloubku a šíři, nebo se jednou provždy zasnoubí s jeho nekonečnými vodami. Právě proto je matematika velkým dobrodružstvím myšlení.

Každá věda (tedy i technické a přírodní vědy) nás nutí, abychom definovali nové pojmy i vytvořili nové teorie. Jejich cílem je strhnout stěnu rozporů, která často tarasí cestu vědeckému pokroku. Zde je role matematiky i logiky nezastupitelná. Všechny podstatné myšlenky v libovolné vědě se zrodily z dramatické srážky mezi realitou a naším úsilím tuto realitu pochopit – objeví se problém, jehož řešení vyžaduje nových zásad. S novou teorií se snažíme nalézt svou cestu bludištěm pozorovaných faktů a uspořádat a pochopit svět svých smyslových dojmů. Žádáme, aby pozorovaná fakta logicky vyplývala z našeho obrazu skutečnosti. Bez víry, že je možno postihnout skutečnost našimi teoretickými konstrukcemi, bez víry ve vnitřní harmonii našeho světa by nebylo vědy. Tato víra je a vždy zůstane základním motivem všeho vědeckého tvoření. Ve všem našem úsilí, v každém dramatickém zápolení mezi starými a novými názory poznáváme věčnou snahu o porozumění, věčnou a pevnou víru v harmonii našeho světa, která stále sílí rostoucími obtížemi, jež se stavějí v cestu naší chápavosti. Souhlasí to se závěrem, ke kterému došla současná věda, že i v přírodních vědách lze vědecké teorie toliko vyvrátit, nikoliv potvrdit. Dnes již zesnulý filosof přírodních a sociálních věd rakouského původu Sir Karl Raimund Popper, který bývá s tímto názorem spojován, napsal: „*Věda není systémem jistých, dobře zavedených, tvrzení... Naše věda není znalost (episteme); nemůže nikdy prohlašovat, že dosáhla pravdy, či náhražky za tuto, jako je pravděpodobnost... Neznáme, můžeme toliko hádat.*“

[6] O Eukleidovi (řecky Εὐκλείδης, 325 př. n. l. až 260 př. n. l.) toho nevíme mnoho, neznáme místo jeho narození ani smrti. Možná se narodil v libanonském Tyru nebo v Alexandrii, ale také možná v Gela na Sicílii. Z jeho života nevíme skoro nic. Snad jen to, že po studiích v Athénách působil za vlády Ptolemaia I. v alexandrijském Múseiu. Ale jeho *Základy* (řecky *Stoicheia*) jsou snad vedle Bible doposud nejvydávanější knihou světa. Toto dílo sloužilo až donedávna bez jakýchkoli zásadních úprav jako učebnice geometrie na anglických středních školách. Originál se nezachoval. Nejstarší známý rukopis, který pochází z 9. století, vlastní Vatikánská knihovna.

Nelze ovšem přeceňovat roli matematických modelů. Taková abstrakce je vlastně snahou popsat nekonečný svět konečným jazykem. Také zvolení nevhodného modelu (např. zanedbáním významných faktorů) může vést k velmi chybným závěrům. Nejen otázka vhodnosti takového modelu je určitě jedna z velmi důležitých, ale také je významné se zamyslet nad tím, zda některé reálné situace je nutné popisovat matematickým modelem. Do knihoven se chodit musí, jistě, a člověk se musí stát učencem. Ale ať studujete a pracujete, jak chcete, ještě něco chybí. Nechcete-li jen opisovat, musíte z knihovny ven, na čerstvý vzduch. Jinak budete psát jen knihy z knih. Cílem učení je konec učení, to jest vynalézání a objevování.

Q.B.F.F.F.S.[7]

[7] Quod bonum, faustum, felix, fortunatumque sit. – „Všechno dobré, příznivé a šťastné ať je požehnáno“, stará formule přání (Cicero, *De divinatione*), užívaná od 16. století na universitách

VYSOKÁ
ŠKOLA
EKONOMIE
A MANAGEMENTU

OPPA

PRAHA
PRAGUE
PRAGA
PRAG

EVROPSKÁ UNIE